Nombres de Catalan (Centrale PC 2021)

Durée : 4 heures

Ce sujet est divisé en trois parties.

- Dans la première partie, on étudie une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ qui modélise la trajectoire d'une particule. On s'intéresse en particulier au temps nécessaire pour que la particule revienne pour la première fois à son point de départ, si cela arrive. Pour cela, on introduit une suite de nombres appelés nombres de Catalan et on étudie leurs propriétés.
- Dans la deuxième partie, entièrement indépendante de la première, on s'intéresse au calcul d'un déterminant à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.
- Dans la troisième partie enfin, on utilise les résultats des deux premières parties pour calculer deux déterminants associés aux nombres de Catalan.

I Étude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs dans $\{-1,1\}$, mutuellement indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1-p, \qquad \text{où } p \in]0,1[.$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélise la trajectoire aléatoire dans $\mathbb{Z}$ d'une particule située en $S_0 = 0$ à l'instant initial $n = 0$, et faisant à chaque instant $n \in \mathbb{N}$ un saut de $+1$ avec une probabilité p et de -1 avec une probabilité $1-p$, les sauts étant indépendants et p appartenant à $]0,1[$.

Pour $\omega \in \Omega$, on représente la trajectoire de la particule par la ligne brisée joignant les points de coordonnées $(n, S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$.

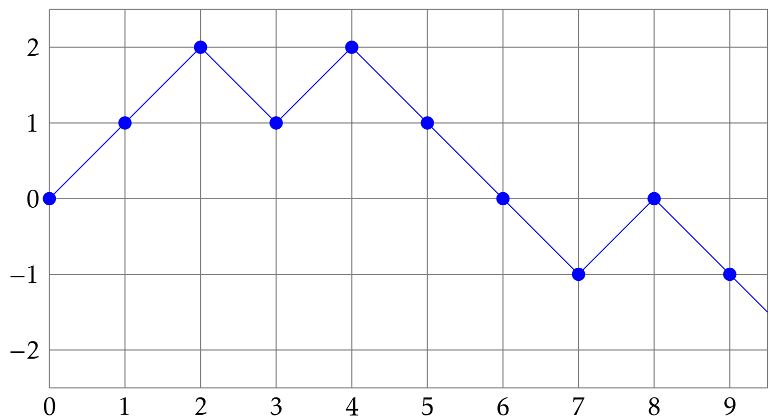

Figure 1 – Exemple de trajectoire possible

I.A – *Espérance et variance de S_n*

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul.

Soit Y_n la variable aléatoire sur Ω égale au nombre de valeurs de $k \in [\![1,n]\!]$ telles que $X_k = 1$.

Q 1. Quelle est la loi de Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de Y_n.

Q 2. Quelle relation a-t-on entre S_n et Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de S_n. Justifier que S_n et n ont même parité.

I.B – *Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine*

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on appelle chemin de longueur m tout m-uplet $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ tel que $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\gamma_i \in \{-1,1\}$.

On pose alors $s_\gamma(0) = 0$ et, pour tout $k \in [\![1,m]\!]$, $s_\gamma(k) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i$.

On représente le chemin γ par la ligne brisée joignant la suite des points de coordonnées $(k, s_\gamma(k))_{k\in[\![0,m]\!]}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- on appelle chemin de Dick de longueur $2n$ tout chemin $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ de longueur $2n$ tel que $s_\gamma(2n) = 0$ et $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $s_\gamma(k) \geqslant 0$;
- on note C_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

On convient de plus que $C_0 = 1$.
La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite des nombres de Catalan. On constate que $C_1 = 1$ et $C_2 = 2$.

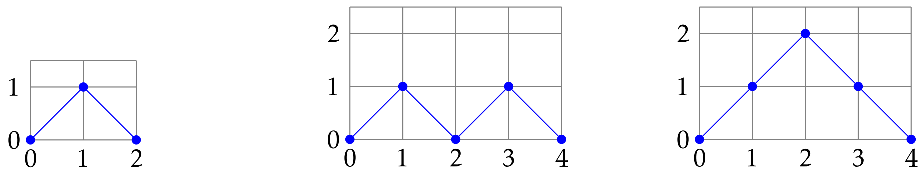

FIGURE 2 – Représentation des chemins de Dyck de longueurs 2 et 4

Q 3. Donner sans démonstration la valeur de C_3 et représenter tous les chemins de Dyck de longueur 6.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$ un chemin de Dyck de longueur $2n+2$. Soit $r = \max\left\{i \in [\![0, n]\!] \;\middle|\; s_\gamma(2i) = 0\right\}$.
On suppose $0 < r < n$ et on considère les chemins $\alpha = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2r})$ et $\beta = (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1})$.

Q 4. Justifier à l'aide d'une figure que $\gamma_{2r+1} = 1$, $\gamma_{2n+2} = -1$ et que α et β sont des chemins de Dyck.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ un chemin de longueur m.
Pour $t \in \mathbb{N}$, on note $A_{t,\gamma}$ l'événement : « pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $X_{t+k} = \gamma_k$ » ; en d'autres termes,

$$A_{t,\gamma} = \bigcap_{k=1}^{m} \left(X_{t+k} = \gamma_k\right)$$

Q 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ un chemin de Dyck de longueur $2n$. Pour $t \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(A_{t,\gamma})$ en fonction de n et p.

Soit T la variable aléatoire, définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$, égale au premier instant où la particule revient à l'origine, si cet instant existe, et égale à 0 si la particule ne revient jamais à l'origine :

$$\forall w \in \Omega, \quad T(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ S_k(\omega) \neq 0 \\ \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; S_k(\omega) = 0\right\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 6. Montrer que T prend des valeurs paires et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(T = 2n+2\big) = 2C_n p^{n+1}(1-p)^{n+1}$.

I. B. 1) Série génératrice des nombres de Catalan

Q 7. En utilisant la question 4, montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} C_r C_{n-r}$.

Q 8. À l'aide de la variable aléatoire T, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{C_n}{4^n}$ converge.

Q 9. En déduire que la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} C_n t^n$ converge normalement sur l'intervalle $I = \left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$.

On pose alors, pour tout $t \in I$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n \quad$ et $\quad g(t) = 2t f(t)$.

On rappelle que la série génératrice de T, donnée par $G_T(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) t^n$, est définie si $t \in [-1, 1]$.

Q 10. À l'aide des questions précédentes, exprimer G_T à l'aide de g et de $P(T = 0)$.

Q 11. En déduire que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, alors T admet une espérance.

Q 12. Montrer que $\forall t \in I$, $g(t)^2 = 2g(t) - 4t$.

Q 13. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \{-1, 1\}$ telle que $\forall t \in I, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1 - 4t}$.

Q 14. Montrer que ε est continue sur $I \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$. En déduire $\forall t \in I, \quad g(t) = 1 - \sqrt{1-4t}$.

Q 15. En déduire que $\mathbb{P}(T \neq 0) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$. Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.

Q 16. Montrer que si $p = \frac{1}{2}$, alors T n'admet pas d'espérance.

I. C – Expression des nombres de Catalan et équivalent

Q 17. Justifier l'existence d'une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in]-1,1[, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n à l'aide d'un coefficient binomial.

Q 18. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Q 19. Rappeler l'équivalent de Stirling. En déduire un équivalent de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Q 20. À partir de la question précédente, retrouver le résultat des question 11 et 16.

II Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G_n = \left(\left(X^{i-1} \,\middle|\, X^{j-1}\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (1 \mid 1) & (1 \mid X) & \cdots & (1 \mid X^n) \\ (X \mid 1) & (X \mid X) & \cdots & (X \mid X^n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X^n \mid 1) & (X^n \mid X) & \cdots & (X^n \mid X^n) \end{pmatrix}$$

On cherche à obtenir une expression du déterminant de G_n à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

II. A – Définition et propriétés d'un système orthogonal

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, on appelle système orthogonal toute suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \implies \left(P_i \,\middle|\, P_j\right) = 0$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire et de degré n.

Dans toute la partie II, on considère un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 21. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Q 22. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P < n$. Montrer que $\left(V_n \,\middle|\, P\right) = 0$.

Q 23. Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un autre système orthogonal. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n$.

II. B – Expression de $\det G_n$ *à l'aide de la suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit G'_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G'_n = \left(\left(V_{i-1} \,\middle|\, V_{j-1}\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (V_0 \mid V_0) & (V_0 \mid V_1) & \cdots & (V_0 \mid V_n) \\ (V_1 \mid V_0) & (V_1 \mid V_1) & \cdots & (V_1 \mid V_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (V_n \mid V_0) & (V_n \mid V_1) & \cdots & (V_n \mid V_n) \end{pmatrix}$$

On note $Q_n = (q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ la matrice de la famille $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 24. Montrer que Q_n est triangulaire supérieure et que $\det Q_n = 1$.

Q 25. Montrer que $Q_n^T G_n Q_n = G'_n$, où Q_n^T est la transposée de la matrice Q_n.

Q 26. En déduire que $\det G_n = \prod_{i=0}^{n} \|V_i\|^2$.

III Déterminant de Hankel des nombres de Catalan

Dans cette partie, on introduit un produit scalaire particulier sur $\mathbb{R}[X]$ et une suite de polynômes. On vérifie qu'il s'agit d'un système orthogonal pour ce produit scalaire, ce qui permettra d'appliquer les résultats de la partie précédente.

III. A – Produit scalaire

Q 27. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la fonction $x \mapsto P(4x)Q(4x)\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Dans toute la partie III, on pose

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X], \quad \left(P \,\middle|\, Q\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Q 28. Montrer que $(\cdot\,|\,\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

III. B – Système orthogonal

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $U_0 = 1$, $U_1 = X-1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = (X-2)U_{n+1} - U_n$.

Q 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n est unitaire de degré n, et déterminer la valeur de $U_n(0)$.

Q 30. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(4\cos^2\theta)\sin(\theta) = \sin((2n+1)\theta)$.

Q 31. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin((2m+1)\theta)\sin((2n+1)\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Q 32. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|U_n\| = 1$.
Pour calculer la valeur de $(U_m \,|\, U_n)$, on pourra effectuer le changement de variable $x = \cos^2\theta$.

III. C – Application

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = (X^n \,|\, 1)$.

Q 33. À l'aide d'une intégration par parties, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4\mu_{n-1} - \mu_n = \frac{2\times 4^n}{\pi}\int_0^1 x^{n-3/2}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2n-1}\mu_n$$

Q 34. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = C_n$.

Q 35. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des parties précédentes la valeur du déterminant

$$H_n = \det\left(C_{i+j-2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & \iddots & \iddots & & \iddots & C_{2n-1} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} & C_{2n} \end{vmatrix}$$

III. D – Un autre déterminant de Hankel

Dans cette sous-partie, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n(X) = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} & X^n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad H'_n = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_2 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_3 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-3} \\ C_{n-1} & \iddots & \iddots & & \iddots & C_{2n-2} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-3} & C_{2n-2} & C_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Q 36. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$. Montrer $\left(D_n \,\middle|\, X^k\right) = 0$.

Q 37. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = U_n$, puis déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur du déterminant H'_n.