Corrigé : matrices et vecteurs aléatoires (Centrale PSI 2022)

I Partie I

I. A – Quelques résultats préliminaires

Q 1. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\operatorname{tr}(\lambda A+B) = \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{kk}+b_{kk}) = \lambda\sum_{k=1}^{n}a_{kk}+\sum_{k=1}^{n}b_{kk} = \lambda\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$ donc la trace est une forme linéaire. De plus, $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}\Big)$ et $\operatorname{tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}$ donc $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Q 2. On observe que $\operatorname{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$; on reconnait le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 3. Ainsi, si $A^T A = 0$ alors $\operatorname{tr}(A^T A) = 0$, soit encore $\|A\|^2 = 0$. S'agissant d'une norme on en déduit que $A = 0$.

I. B – Quelques propriétés de $\mathcal{N}_n$

Q 4. Une matrice nilpotente ne peut être inversible donc admet 0 pour valeur propre.
Considérons maintenant une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ d'une matrice nilpotente A : il existe $Z \in \mathbb{C}^n$, $Z \neq 0$, telle que $AZ = \lambda Z$. Pour tout entier k on a alors $A^k Z = \lambda^k Z$ et il existe donc $k \geqslant 1$ tel que $\lambda^k Z = 0$, soit $\lambda = 0$ puisque $Z \neq 0$: 0 est bien la seule valeur propre complexe de A.

Q 5. La trace de $A \in \mathcal{N}_n$ est la somme de ses valeurs propres complexes (comptées en tenant compte de leur multiplicité) donc $\operatorname{tr}(A) = 0$, et puisque 0 est valeur propre, A n'est pas inversible et $\det(A) = 0$.

Q 6. Si M est nilpotente, il existe $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ et donc $(M^k)^2 = 0$, soit $(M^2)^k = 0$: la matrice M^2 est aussi nilpotente.

Q 7. Puisque M et N sont nilpotentes, il existe $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ tels que $M^p = N^q = 0$. Posons $k = \max(p,q)$; alors $M^k = N^k = 0$.
Puisque M et N commutent, $(MN)^k = M^k N^k = 0$, et $(M+N)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k}\binom{2k}{i}M^i N^{2k-i}$. Or pour tout $i \in [\![0,2k]\!]$ on a $i \geqslant k$ ou $2k-i \geqslant k$ donc $M^i = 0$ ou $N^{2k-i} = 0$. On en déduit que $(M+N)^{2k} = 0$: les matrices MN et M + N sont bien nilpotentes.

Q 8. D'après la question 6, les matrices $(M+N)^2$, M^2 et N^2 sont nilpotentes donc de trace nulle. On en déduit que $\operatorname{tr}\big((M+N)^2 - M^2 - N^2\big) = 0$, soit encore en développant : $\operatorname{tr}(MN+NM) = 0$. D'après la question 1 on en déduit que $2\operatorname{tr}(MN) = 0$, soit $\operatorname{tr}(MN) = 0$.

Q 9. Considérons une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr}(M) = 0$ et $\det(M) = 0$. On sait que $\chi_M(x) = x^2 - \operatorname{tr}(M)x + \det(M)$ donc ici $\chi_M(x) = x^2$. Ce polynôme est scindé donc M est trigonalisable, et $\operatorname{Sp}(M) = \{0\}$ donc M est semblable à une matrice de la forme $N = \begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On calcule $N^2 = 0$ donc $M^2 = 0$: M est nilpotente. La réciproque a été démontrée à la question 5.

Q 10. Si A est nilpotente et symétrique, les matrices A, $A^T = -A$ et $A + A^T = 2A$ sont nilpotentes donc d'après la question 8, $\operatorname{tr}(A^T A) = 0$. On en déduit que $A = 0$ grâce à la question 3.

Q 11. Le raisonnement de la question précédente s'applique aussi à une matrice antisymétrique A puisque A, $A^T = -A$ et $A + A^T = 0$ sont nilpotentes.

Q 12. La matrice $A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ est de déterminant et de trace nuls sans que A soit nilpotente puisqu'elle possède des valeurs propres non nulles (question 4).

II Matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

II. A – Quelques résultats algébriques

Q 13. On a $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V - 2E_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (le -1 est situé sur la i^e ligne) donc V et $V - 2E_i$ appartiennent à $\mathcal{V}_{n,1}$.

Puisque $E_i = \frac{1}{2}\Big(V - (V - 2E_i)\Big)$ on en déduit que $E_i \in \mathrm{Vect}(\mathcal{V}_{n,1})$, et puisque $(E_1, \dots, E_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on en déduit que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{V}_{n,1})$.

Q 14. Posons $\mathcal{A} = \Big\{j \in [\![1, n]\!] \;\Big|\; (C_1, \dots, C_j) \text{ est libre}\Big\}$. Puisque $C_1 \neq 0$ cet ensemble est non vide (il contient 1) donc possède un plus grand élément j.
Puisque la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est liée on a $j \leqslant n - 1$, et puisque $j \in \mathcal{A}$ et $j + 1 \notin \mathcal{A}$, $C_{j+1} \in \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_j)$.

Q 15. Comme le suggère l'énoncé, considérons la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $U_1, \dots, U_d$. Cette famille étant libre, le rang de M est égal à d. Les n vecteurs lignes de cette matrice forment donc aussi une famille de rang d ; de ces n lignes on peut donc en extraire d formant une famille libre ; notons-les $L_{i_1}, \dots, Li_d$ avec $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_d \leqslant n$.
Considérons maintenant l'application $\phi : H \to \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ définie par $\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$. Cette application est linéaire et par construction envoie la base $(U_1, \dots, U_d)$ vers une famille de rang d, donc une base de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$. Il s'agit donc d'un isomorphisme.

Q 16. D'après la question 15, il existe $i_1 < \cdots < i_d$ tel que $\phi : \mathcal{W} \to \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ définie par $\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$ soit un isomorphisme. Cet isomorphisme établit une injection entre $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{n,1}$ et $\mathcal{V}_{d,1}$. Or ce dernier ensemble est de cardinal 2^d donc $\mathrm{card}(\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{n,1}) \leqslant 2^d$.

II. B – Une loi de probabilité

Q 17. Posons $Y = \frac{1}{2}(X + 1)$. Alors $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ donc Y suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$.

Q 18. On a $X = 2Y - 1$ et on sait que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(Y) = \frac{1}{4}$ donc $\mathbb{E}(X) = 2\mathbb{E}(X) - 1 = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 4\mathbb{V}(Y) = 1$.

Q 19. On a $XY \in \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}\Big((X, Y) = (1, 1)\Big) + \mathbb{P}\Big((X, Y) = (-1, -1)\Big)$ (les événements $(X, Y) = (1, 1)$ et $(X, Y) = (-1, -1)$ sont incompatibles). X et Y étant indépendantes, $\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$.
Ainsi, XY suit la loi $\mathcal{R}$.

II. C – Un procédé de génération de matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

Q 20. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\tau_n) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} m_{k,k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(m_{k,k}) = 0$ d'après la question 18.

Les variables $m_{k,k}$ étant mutuellement indépendantes, $\mathbb{V}(\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(m_{k,k}) = n$, toujours d'après la question 18.

Q 21. Si on développe δ_n suivant la première colonne on obtient $\delta_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} m_{i,1} \Delta_{i,1}$ où $\Delta_{i,1}$ est le mineur obtenu en supprimant la première colonne et la i^e ligne. D'après le lemme des coalitions les variables aléatoires $m_{i,1}$ et $\Delta_{i,1}$ sont indépendantes donc $\mathbb{E}(\delta_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \mathbb{E}(m_{i,1}) \mathbb{E}(\Delta_{i,1}) = 0$ puisque $\mathbb{E}(m_{i,1}) = 0$.

Q 22. Montrons maintenant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ de $\mathbb{V}(\delta_n) = n!$.
– Si $n = 1$ on a $\delta_1 = m_{1,1}$ donc $\mathbb{V}(\delta_1) = \mathbb{V}(m_{1,1}) = 1 = 0!$.
– Si $n > 1$, supposons le résultat acquis au rang $n - 1$ et reprenons la démarche initiée à la question précédente. Puisque $\mathbb{E}(\delta_n) = 0$ on a $\mathbb{V}(\delta_n) = \mathbb{E}(\delta_n^2)$, et $\delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,1} m_{j,1} \Delta_{i,1} \Delta_{j,1}$ donc $\mathbb{V}(\delta_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \mathbb{E}\Big(m_{i,1} m_{j,1} \Delta_{i,1} \Delta_{j,1}\Big)$.
Les variables aléatoires $m_{i,1} m_{j,1}$ et $\Delta_{i,1} \Delta_{j,1}$ sont indépendantes (lemme des coalitions) donc

$$\mathbb{E}\Big(m_{i,1} m_{j,1} \Delta_{i,1} \Delta_{j,1}\Big) = \mathbb{E}\Big(m_{i,1} m_{j,1}\Big) \mathbb{E}\Big(\Delta_{i,1} \Delta_{j,1}\Big)$$

Pour $i \neq j$ les variables aléatoires $m_{i,1}$ et $m_{j,1}$ sont indépendantes et dans ce cas $m_{i,1} m_{j,1}$ suit la loi $\mathcal{R}$ (question 19) donc $\mathbb{E}(m_{i,1} m_{j,1}) = 0$.

Pour $i=j$ on a $m_{i,1}m_{j,1}=1$ et ainsi $\mathbb{V}(\delta_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(\Delta_{k,1}^2)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\mathbb{V}(\Delta_{k,1})+\mathbb{E}(\Delta_{k,1})^2\Big)$.
Mais d'après la question 21 on a $\mathbb{E}(\Delta_{k,1})=0$ et par hypothèse de récurrence, $\mathbb{V}(\Delta_{k,1})=(n-1)!$ donc $\mathbb{V}(\delta_n)=\sum_{k=1}^{n}(n-1)!=n!$; la récurrence se propage.

Q 23. D'après la question 9, M_2 est nilpotente si et seulement si $\tau_2=0$ et $\delta_2=0$. Or :

$$\tau_2=0 \text{ et } \delta_2=0 \iff \begin{cases} m_{11}+m_{22}=0 \\ m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} m_{22}=-m_{11} \\ m_{12}m_{21}=-1 \quad (\text{car } m_{11}^2=1) \end{cases}$$

Par indépendance mutuelle, $\mathbb{P}\big(M_2\in\mathcal{N}_2\big)=\mathbb{P}\big([m_{22}=-m_{11}]\cap[m_{12}m_{21}=-1]\big)=\mathbb{P}\big(m_{22}=-m_{11}\big)\mathbb{P}\big(m_{12}m_{21}=-1\big)$.
On a $\mathbb{P}(m_{22}=-m_{11})=\mathbb{P}(m_{22}=1)\mathbb{P}(m_{11}=-1)+\mathbb{P}(m_{22}=-1)\mathbb{P}(m_{11}=1)=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(m_{12}m_{21}=-1)=\dfrac{1}{2}$ (question 19) donc $\mathbb{P}\big(M_2\in\mathcal{N}_2\big)=\dfrac{1}{2}$.

Q 24. Les variables $X=m_{11}m_{22}$ et $Y=m_{12}m_{21}$ suivent la loi $\mathcal{R}$ (question 19) et sont indépendantes (lemme des coalitions) donc $\mathbb{P}(\delta_2=0)=\mathbb{P}(X=Y)=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=-1)=\dfrac{1}{2}$ et ainsi, $\mathbb{P}\big(M_2\in\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})\big)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

II. D – Une généralisation

II. D. 1)

Q 25. Par indépendance mutuelle, $\mathbb{P}\big((c_1=\epsilon_1)\cap\cdots\cap(c_n=\epsilon_n)\big)=\mathbb{P}(c_1=\epsilon_1)\cdots\mathbb{P}(c_n=\epsilon_n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Q 26. C et C′ ne sont jamais nulles donc (C,C') est liée si et seulement s'il existe $\epsilon\in\mathbb{R}^*$ tel que $C'=\epsilon C$. En particulier, $c_1'=\epsilon c_1$, et puisque c_1 et c_1' sont dans $\{-1,1\}$, $\epsilon\in\{-1,1\}$. La réciproque est évidente.

Q 27. Ainsi, $\mathbb{P}\big((C,C')\text{ est liée}\big)=\mathbb{P}(C'=C)+\mathbb{P}(C'=-C)$ (les deux événements sont incompatibles)
Or $C'=C \iff c_1'c_1=\cdots c_n'c_n=1$ et d'après les questions 19 et 25, $\mathbb{P}(C'=C)=\dfrac{1}{2^n}$.
De même, $C'=-C \iff c_1'c_1=\cdots c_n'c_n=-1$ et $\mathbb{P}(C'=-C)=\dfrac{1}{2^n}$. On en déduit que $\mathbb{P}\big((C,C')\text{ est liée}\big)=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

II. D. 2)

Q 28. Le système $(R_n,\overline{R}_n)$ est un système complet d'événements, et d'après la question 14, $\overline{R}_n=R_1\cup\cdots\cup R_{n-1}$, ces événements étant deux à deux incompatibles. On en déduit que $(R_1,\dots,R_n)$ est un système complet d'événements.

II. D. 3)

Q 29. On a $\mathbb{P}\big(M\notin\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\big)=1-\mathbb{P}\big(M\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\big)=1-\mathbb{P}(R_n)=\sum_{j=1}^{n-1}\mathbb{P}(R_j)$.

Or $R_j \implies \big[C_{j+1}\in\mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_j)\big]$ donc $\mathbb{P}\big(M\notin\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\big)\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\mathbb{P}\big(C_{j+1}\in\mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_j)\big)$.

Q 30. La famille $\big((C_1=v_1)\cap\cdots\cap(C_j=v_j)\big)_{(v_1,\dots,v_j)\in\mathcal{V}_{n,1}^j}$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}\big(C_{j+1}\in\mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_j)\big)=\sum_{(v_1,\dots,v_j)\in\mathcal{V}_{n,1}^j}\mathbb{P}\big(C_{j+1}\in\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_j)\big)\mathbb{P}\big((C_1=v_1)\cap\cdots\cap(C_j=v_j)\big)$$

Q 31. On a $\dim\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_j)\leqslant j$ donc $\mathrm{card}(\mathcal{V}_{n,1}\cap\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_j)\leqslant 2^j$ (question 16). Par ailleurs, $\mathrm{card}\,\mathcal{V}_{n,1}=2^n$ donc $\mathbb{P}\big(C_{j+1}\in\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_j)\big)\leqslant\dfrac{2^j}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-j}}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\big(C_{j+1}\in\mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_j)\big)\leqslant\frac{1}{2^{n-j}}\sum_{(v_1,\dots,v_j)\in\mathcal{V}_{n,1}^j}\mathbb{P}\big((C_1=v_1)\cap\cdots\cap(C_j=v_j)\big)=\frac{1}{2^{n-j}}$$

puisque $\big((C_1=v_1)\cap\cdots\cap(C_j=v_j)\big)_{(v_1,\dots,v_j)\in\mathcal{V}_{n,1}^j}$ est un système complet d'événements.

Q 32. On en déduit que $\mathbb{P}\left(M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n-j}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ et donc que $\mathbb{P}\left(M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

III Vecteurs aléatoires unitaires

Q 33. L'ensemble $\left\{|\langle u_i \mid u_j\rangle| \;\middle|\; i \neq j\right\}$ est non vide (puisque $\operatorname{card} I \geqslant 2$) et majoré par 1 (car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left|\langle u_i \mid u_j\rangle\right| \leqslant \|u_i\| \times \|u_j\| = 1$) donc possède une borne supérieure $C(u) \leqslant 1$.

Q 34. Si $C(u) = 0$ alors pour tout $i \neq j$ dans I, $\langle u_i \mid u_j\rangle = 0$; La famille $(u_i)_{i\in I}$ est donc orthonormée. Or une famille orthonormée est libre donc ne peut comporter plus de n éléments ; ainsi $\operatorname{card} I \leqslant n$.

Q 35. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$.

Posons $a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2n+1 \geqslant 1$ donc $a_n \geqslant a_0 = 1$, soit $(2n)! \geqslant 2^n n!$. On en déduit que $\operatorname{ch} t \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Q 36. $\langle X \mid Y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k Y_k$ donc $\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right)$. D'après le lemme des coalitions les variables aléatoires $\exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right)$ sont indépendantes donc $\mathbb{E}\left(\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right)\right)$.

On sait d'après la question 19 que $X_k Y_k$ suit la loi $\mathcal{R}$ donc d'après la formule de transfert, $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right)\right) = \frac{1}{2} e^{t/n} + \frac{1}{2} e^{-t/n} = \operatorname{ch}\left(\frac{t}{n}\right)$ et ainsi $\mathbb{E}\left(\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right)\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{t}{n}\right)^n$.

Q 37. La question 35 fournit ensuite la majoration : $\mathbb{E}\left(\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2n^2}\right)^n = \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right)$.

Q 38. $\exp(tZ)$ est positive et d'espérance finie donc d'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}\left(\exp(tZ) \geqslant e^{\lambda t}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\exp(tZ)\right)}{e^{\lambda t}}$. Or pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}\left(\exp(tZ) \geqslant e^{\lambda t}\right) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \geqslant \lambda)$ donc $\mathbb{P}(Z \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$.

Q 39. En appliquant cette inégalité au réel $t = \frac{\lambda}{\sigma^2}$ on obtient $\mathbb{P}(Z \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$.
Considérons maintenant la variable aléatoire $-Z$. Nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp\left(t(-Z)\right) = \exp\left((-t)Z\right)$ donc $\mathbb{E}\left(\exp\left(t(-Z)\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2(-t)^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$ et $-Z$ vérifie la même hypothèse que Z. On peut donc lui appliquer à son tour l'inégalité que l'on vient d'établir : $\mathbb{P}(-Z \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$.
Les événements $[Z \geqslant \lambda]$ et $[Z \leqslant -\lambda]$ sont incompatibles et $[Z \geqslant \lambda] \cup [Z \leqslant -\lambda] = [|Z| \geqslant \lambda]$ donc $\mathbb{P}\left(|Z| \geqslant \lambda\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$.

Q 40. D'après la question 37 on peut appliquer cette inégalité à $Z = \langle X \mid Y\rangle$ avec $\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lambda = \epsilon$ et ainsi obtenir $\mathbb{P}\left(|\langle X \mid Y\rangle| \geqslant \epsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right)$.

Q 41. D'après l'inégalité de sous-additivité,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} \left[|\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \epsilon\right]\right) \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \mathbb{P}\left(|\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right) = N(N-1)\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right)$$

Q 42. Pour $n \geqslant 4\frac{\ln N}{\epsilon^2}$ on a $\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right) \leqslant \frac{1}{N^2}$ donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} \left[|\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \epsilon\right]\right) \leqslant 1 - \frac{1}{N} < 1$.

Q 43. Ainsi, pour tout $N \leqslant \exp\left(\frac{\epsilon^2 n}{4}\right)$ on peut affirmer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} \left[|\langle X^i \mid X^j\rangle| < \epsilon\right]\right) > 0$. Il existe donc au moins un $\omega \in \Omega$ tel que la famille de vecteurs $(X^i(\omega))_{1\leqslant i\leqslant N}$ vérifie pour tout $i \neq j$, $|\langle X^i(\omega) \mid X^j(\omega)\rangle| < \epsilon$, autrement dit telle que cette famille soit presque orthogonale.

Rapport de l'épreuve

Présentation du sujet

Le sujet de Maths 1 de la filière PSI 2022 a pour objectif la démonstration d'un résultat de géométrie dans un espace euclidien. Pour cela, plusieurs résultats intermédiaires sont démontrés, notamment sur les matrices nilpotentes et sur les variables aléatoires discrètes.

Le problème est constitué de quatre parties largement indépendantes :

- une première partie vise à faire démontrer des propriétés sur les matrices nilpotentes ;
- une deuxième partie permet de mettre en évidence des propriétés algébriques de l'ensemble des matrices colonnes ne comportant que des 1 et des -1, puis propose l'étude d'une loi de probabilité sur l'ensemble $\{^{-}1, 1\}$;
- une troisième partie demande aux candidats de rédiger des programmes en Python en lien avec les matrices ; *j'ai supprimé cette partie, qui ne rentre plus dans le cadre actuel du programme*
- une quatrième et dernière partie entre dans le cœur de la preuve du résultat visé par le sujet.

Il était attendu des candidats qu'ils maitrisent bien leur cours d'algèbre linéaire pour traiter ce problème : propriétés de la trace ou du déterminant, manipulations de matrices et de leurs puissances, définition d'une valeur propre par exemple. Une bonne maitrise des raisonnements élémentaires de probabilités était également indispensable : indépendance ou incompatibilité d'évènements, propriétés de l'espérance et de la variance. Enfin, quelques autres chapitres (espaces euclidiens, études de fonctions) rentraient également en jeu.

Analyse globale des résultats

La première partie a été abordée presque entièrement par tous les candidats, et certaines questions ont été très bien traitées. En revanche, le cours n'est pas toujours bien appris et certains résultats, pourtant très importants, ne sont parfois pas cités correctement (propriétés de la trace ou formule du binôme de Newton par exemple).

La deuxième partie a aussi été très largement étudiée mais avec moins de succès. Dans la première sous-partie (résultats algébriques), de nombreuses idées intéressantes ont été proposées, mais la rigueur mathématique était parfois absente dans les explications. Dans les sous-parties suivantes, les premières questions sur les variables de Rademacher ont été très bien réussies mais les dernières, plus théoriques, n'ont été correctement traitées que par peu de candidats.

La troisième partie, consacrée à l'algorithmique, a été globalement bien réussie par les candidats qui s'y sont lancés et la syntaxe Python est dans l'ensemble bien maitrisée.

La dernière partie a été moins abordée par les candidats, sans doute à cause de sa position dans le problème, mais aussi peut-être parce qu'elle nécessitait de combiner habilement plusieurs résultats d'analyse, d'algèbre et de probabilités.

Concernant la présentation des copies, une majorité est assez clairement présentée, avec des questions numérotées correctement, traitées dans l'ordre et des résultats encadrés. Ceux qui dérogent à ces règles de base font tout de suite mauvaise impression et prennent le risque d'être moins bien compris par les correcteurs.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problèmes aux candidats :

- les candidats doivent faire un effort de présentation des copies, numéroter les questions, les traiter dans l'ordre (quitte à laisser des blancs pour y revenir) et encadrer leurs résultats ;
- l'utilisation des abréviations doit être limitée : si certaines (CNS, SSI...) sont très couramment utilisées, d'autres (FPT pour formule des probabilités totales.) le sont nettement moins. De même, l'emploi d'abréviations telles que $\forall$, $\Longleftrightarrow$ doit être modéré dans des explications, et ces symboles ne doivent figurer que dans des assertions ne contenant que des symboles mathématiques ;
- un raisonnement doit être articulé avec des mots clés (considérons, or, donc, car, en effet) : les hypothèses et les objectifs doivent être clairement identifiés ;
- lorsqu'une égalité entre deux ensembles est demandée et qu'un raisonnement par « double inclusion », est choisi, il est important de bien démontrer les deux inclusions, ou à défaut, de signaler que l'une d'entre elles est évidente si tel est le cas ;
- pour démontrer une équivalence entre deux propriétés, on peut raisonner directement par équivalence, ou raisonner par double implication. Mais montrer une seule implication ne suffit pas ;

- dans la **Q1**, il était demandé de démontrer que l'application trace était linéaire. Il n'était donc pas suffisant d'écrire que « la trace est clairement linéaire » : un minimum de rédaction était attendu ;
- dans la **Q2**, 4 points précis sont attendus pour démontrer qu'une application est un produit scalaire. En particulier, la positivité ne consiste pas à démontrer que $\mathrm{tr}(A^T B) \geqslant 0$. Rappelons par ailleurs que la trace d'un produit n'est en général pas égale au produit des traces ! Enfin, il est important de faire la différence entre un produit scalaire et une norme ;
- lorsqu'un résultat précédemment démontré est utilisé, il est important de le signaler. De même, le lemme des coalitions, proposé dans le préambule, devait être rappelé par tout candidat qui souhaitait l'utiliser ;
- dans la **Q4**, de nombreux candidats ont oublié de démontrer que 0 était la seule valeur propre ;
- dans la **Q7**, l'utilisation de la formule du binôme de Newton nécessite de préciser que les deux matrices M et N commutent. Par ailleurs, dans cette dernière formule, l'indice de sommation commence à 0 et non pas à 1 ;
- dans la **Q8**, les deux matrices M et N ne commutaient pas. Le développement de $(M+N)^2$ n'est donc pas $M^2+2MN+N^2$;
- dans la **Q10**, plusieurs méthodes de résolution étaient possibles. Lorsque le théorème spectral était utilisé, il ne fallait pas oublier d'en préciser toutes les hypothèses ;
- dans la **Q12**, il était attendu qu'un minimum d'explications accompagnent l'exemple proposé par le candidat. C'est d'autant plus préjudiciable lorsque le correcteur constatait que le déterminant n'était pas nul !
- dans la **Q21**, le déterminant n'est pas une combinaison linéaire de ses coefficients !
- dans la **Q22**, attention, en général la variance d'un produit n'est pas égale au produit des variances ;
- dans la **Q26**, si deux vecteurs C et C′ sont liés, il n'y a pas forcément d'égalité de la forme $C' = aC$. Il faut penser au cas où un des vecteurs est nul pour être exhaustif ;
- dans la **Q32**, la formule donnant l'expression d'une somme géométrique est parfois erronée, et il serait apprécié que le mot « géométrique » apparaisse ;
- Dans la **Q34**, il ne suffit pas de dire que la famille est orthogonale pour conclure qu'elle est libre ! Il est important de préciser que ses vecteurs doivent être non nuls (ce qui est le cas si la famille est orthonormale) ;
- dans la **Q38**, il était attendu que les candidats donnent précisément les hypothèses de l'inégalité de Markov. Par ailleurs, il ne fallait pas oublier de traiter le cas où $t = 0$.

Conclusion

Le sujet était plutôt long mais la progressivité du texte et la diversité des chapitres mathématiques nécessaires (probabilités, réduction, algorithmes. . .) ont permis à tous les candidats de traiter de nombreuses questions et de mettre en évidence leurs compétences. Quelques lacunes sur des notions de base ont malheureusement aussi été repérées.

De nombreux candidats ont su montrer leur maitrise du langage mathématique en général, et plus spécifiquement des points qui étaient nécessaires pour aborder les diverses parties de ce problème : le langage des probabilités ; la diagonalisation des matrices, l'algorithmique. Quelques candidats ont même abordé avec succès les questions plus difficiles qui parsemaient le sujet, et les correcteurs tiennent à les en féliciter.

Les correcteurs ont constaté cette année une bonne maitrise de la rédaction (logique, double implication, clarté des calculs entrepris. . .). Une partie non négligeable des copies propose une rédaction très agréable à lire en mêlant rigueur, justesse et clarté. Les correcteurs encouragent par ailleurs vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. De nombreuses erreurs grossières pourraient ainsi être évitées.