Propriétés des séries semi-convergentes (Centrale PSI 2009)

Durée : 4 heures

Définitions et notations

On rappelle le résultat suivant : toute partie X **non vide** de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément noté $\min X$.

On dira qu'une série à termes réels est *semi-convergente* si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété **($\mathbf{P_1}$)** si pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété **($\mathbf{P_2}$)** si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2).
Les parties I et II sont indépendantes.

I Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel x. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et on se propose de construire une bijection σ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)} = x$.

I. A – On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\geqslant 0}$, $(q_n)_{n\geqslant 0}$, $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ et une suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de réels de la manière suivante :

- $p_0 = q_0 = 0$, $S_0 = 0$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $S_n > x$ alors $q_{n+1} = 1 + q_n \quad p_{n+1} = p_n \quad \sigma_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$;
  sinon $q_{n+1} = q_n \quad p_{n+1} = 1 + p_n \quad \sigma_{n+1} = 2p_{n+1}$.
  Dans les deux cas, $S_{n+1} = S_n + u_{\sigma_{n+1}}$.

On aura intérêt à comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

I. A. 1) Écrire en Python une fonction `suite(x, n)` qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie la liste $[S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n]$.

I. A. 2) En modifiant la fonction précédente de façon à ce qu'elle retourne le dessin de la liste des points de coordonnées (n, S_n) pour $n \leqslant 70$ on obtient, pour $x = -1$ et $n = 70$ le dessin représenté figure 1.
Que constate-t-on pour la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

I. B – On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(n) = \sigma_n$. Prouver, pour $n \geqslant 1$, les propriétés suivantes :

$\left\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\right\} = \left\{2, 4, \ldots, 2p_n\right\} \cup \left\{1, 3, \ldots, 2q_n - 1\right\}$

$p_n + q_n = n$

$S_n = u_{\sigma(1)} + \cdots + u_{\sigma(n)}$.

En déduire que σ est injective.

I. C –

I. C. 1) Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

I. C. 2) On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ croît vers $+\infty$.

a) On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée.
Utiliser la question précédente pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

b) Déduire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

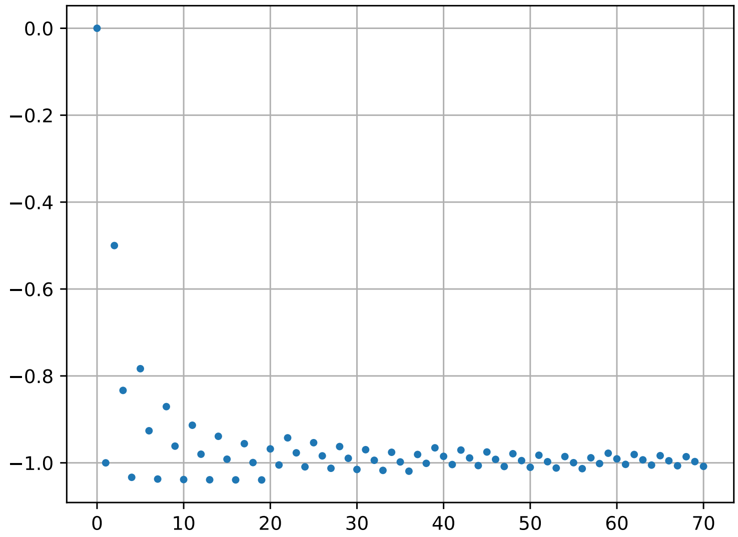

FIGURE 1 – Représentation des valeurs S_n pour $x = -1$ et $0 \leqslant n \leqslant 70$.

I. C. 3) Justifier rapidement que (q_n) tend vers $+\infty$.

I. C. 4) Déduire de ce qui précède que σ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même.

I. D –

I. D. 1) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $|S_{n+1} - x| \leqslant |S_n - x|$ ou $|S_{n+1} - x| \leqslant |u_{\sigma(n+1)}|$.

I. D. 2) En déduire que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que $|S_{n+1} - x| \leqslant |u_{\sigma(n+1)}|$.

I. D. 3) Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $p_n \geqslant 1$ et $q_n \geqslant 1$.

I. D. 4) Soit $n \geqslant n_0$. On note $v_n = \max\left(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|\right)$.
Démontrer que $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

I. D. 5) Démontrer que (S_n) converge vers x et conclure.

I. E –

I. E. 1) Démontrer l'existence d'une constante $\gamma \geqslant 0$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ quand $n \to +\infty$.

I. E. 2) Donner un développement analogue pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ en fonction de γ.

I. E. 3)

a) Justifier, pour tout naturel n tel que $p_n \geqslant 1$ et $q_n \geqslant 1$, l'égalité : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}$.

b) En déduire que $S_n = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{p_n}{n - p_n}\right) - \ln 2 + o(1)$.

c) En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n.

d) Déterminer la limite de $\dfrac{|u_{\sigma(1)}| + |u_{\sigma(2)}| + \cdots + |u_{\sigma(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|}$ quand $n \to +\infty$.

II Suites vérifiant (P_1) et (P_2)

II. A – Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1).

II. B – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge.

II. B. 1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite.

II. B. 2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Prouver, pour tout entier naturel N, la relation :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) S_n + a_N S_N.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_2).

II. C – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge.
Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge.

Caractériser alors les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (P_1).

II. D – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n \epsilon_n$ diverge. Pour cela on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

- $p_0 = 0$, $\epsilon_0 = 1$, $A_0 = a_0$;
- Pour $n \geqslant 1$: $\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} \quad \text{et} \quad \epsilon_n = \dfrac{\epsilon_{n-1}}{2} & \text{si } A_{n-1} \geqslant p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} \quad \text{et} \quad \epsilon_n = \epsilon_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$

  Dans tous les cas : $A_n = A_{n-1} + a_n \epsilon_n$.

II. D. 1) Écrire une fonction Python `serie(a)` qui prend en argument la liste $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ et renvoie la liste

$$\big[[p_0, \epsilon_0, A_0], [p_1, \epsilon_1, A_1], \ldots, [p_n, \epsilon_n, A_n]\big].$$

II. D. 2)

a) Démontrer que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que : $p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers par :

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min\big\{n \in \mathbb{N} \,\big|\, n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\big\} \quad \text{pour } k \geqslant 0 \end{cases}$$

b) Dans le cas général, calculer p_{n_k}, ϵ_{n_k}.

c) Prouver que la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \epsilon_n a_n$ diverge.

II. E – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \epsilon_n a_n$ converge.

a) Prouver que la série $\sum \epsilon_n |a_n|$ converge.

b) En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

II. F – Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n x_n$.

II. F. 1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

II. F. 2) Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série $\sum \epsilon_n (a_{n+1} - a_n)$.

II. F. 3) Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II. F. 4) Caractériser les suites vérifiant (P_2).

♦ ♦
♦