

## CORRIGÉ : PROPRIÉTÉS DES SÉRIES SEMI-CONVERGENTES (CENTRALE PSI 2009)

## I Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

I.A –

I.A.1) On définit la fonction suivante :

```
def suite(x, n):
    p, q, S = 0, 0, [0]
    for k in range(n):
        if S[-1] > x:
            q = 1 + q
            sigma = 2 * q - 1
        else:
            p = 1 + p
            sigma = 2 * p
        S.append(S[-1] + (-1) ** sigma / sigma)
    return S
```

I.A.2) Ce graphe laisse supposer que la suite  $(S_n)$  converge vers  $x$ .Notons que la suite  $(2p_n)$  prend toutes les valeurs paires de  $\mathbb{N}^*$  et la suite  $(2q_n + 1)$  toutes les valeurs impaires.

Lorsque  $S_n > x$  l'entier  $\sigma_{n+1}$  est impair et on soustrait le premier terme impair inutilisé donc  $S_{n+1} < S_n$ ; lorsque  $S_n < x$  l'entier  $\sigma_{n+1}$  est pair et on ajoute le premier terme d'indice pair inutilisé donc  $S_{n+1} > S_n$ . Dans les deux cas on espère se rapprocher de  $x$ .

I.B – Montrons les propriétés demandées par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .– Si  $n = 1$ , deux cas sont possibles :

- Si  $x < 0$  on a  $q_1 = 1, p_1 = 0, \sigma_1 = 1$  et  $S_1 = -1$ ;
- Si  $x \geq 0$  on a  $q_1 = 0, p_1 = 1, \sigma_1 = 2$  et  $S_1 = \frac{1}{2}$ .

Dans les deux cas on vérifie que les propriétés énoncées sont vraies pour  $n = 1$ .– Si  $n \geq 1$ , supposons le résultat acquis au rang  $n$ , à savoir :

- $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$ ;
- $p_n + q_n = n$ ;
- $S_n = u_{\sigma(1)} + \dots + u_{\sigma(n)}$ .

Traisons là encore deux cas :

- Si  $x < S_n$  on a  $q_{n+1} = 1 + q_n, p_{n+1} = p_n$  et  $\sigma(n+1) = 2q_{n+1} - 1$  donc  $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n), \sigma(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} \cup \{2q_{n+1} - 1\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}$ .  
Et  $p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n + 1 = n + 1$ .
- Si  $x \geq S_n$  on a  $q_{n+1} = q_n, p_{n+1} = 1 + p_n$  et  $\sigma(n+1) = 2p_{n+1}$  donc  $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n), \sigma(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} \cup \{2p_{n+1}\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}$ .  
Et  $p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + 1 + q_n = n + 1$ .

Enfin, dans les deux cas on a  $S_{n+1} = S_n + u_{\sigma(n+1)}$  donc  $S_{n+1} = u_{\sigma(1)} + \dots + u_{\sigma(n)} + u_{\sigma(n+1)}$ . La récurrence se propage.

L'union des ensembles  $\{2, 4, \dots, 2p_n\}$  et  $\{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$  est disjointe (l'un contient des nombres pairs, l'autre des nombres impairs) donc  $\text{card}\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} = p_n + q_n = n$ , ce qui prouve que les éléments  $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$  sont deux à deux distincts. Ceci étant vrai pour tout  $n$  on en déduit que  $\sigma$  est injective.

I.C –

I.C.1) Soit  $(a_n)$  une suite d'entiers qui converge. La suite  $(a_{n+1} - a_n)$  converge vers 0 donc il existe un rang  $N$  à partir duquel  $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}$ , ce qui impose  $a_{n+1} - a_n = 0$ , s'agissant d'entiers. La suite  $(a_n)$  est donc stationnaire.

### I. C. 2)

a) La suite  $(p_n)$  est croissante donc si elle est majorée, elle converge et d'après la question précédente elle est stationnaire : il existe un rang  $n_0$  à partir duquel  $p_n = p_{n_0}$ . Ceci impose pour tout  $n \geq n_0$ ,  $S_n > x$ . Mais alors, pour  $n \geq n_0$ , on a  $q_{n+1} = q_n + 1$  donc  $q_{n+1} = q_{n_0} + n + 1 - n_0$  et  $\sigma_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 = 2q_{n_0} + 2n - 2n_0 + 1$ .

$$\text{Pour } n \geq n_0 \text{ on a donc } S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) = S_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{(-1)^{\sigma_{k+1}}}{\sigma_{k+1}} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2(q_{n_0} + k + 1 - n_0) - 1}.$$

Mais  $\frac{1}{2(q_{n_0} + k - n_0) - 1} \sim \frac{1}{2k}$  et puisque la série  $\sum \frac{1}{k}$  est divergente et à terme général positif on en déduit que la série  $\sum \frac{1}{2(q_{n_0} + k - n_0) - 1}$  diverge. Étant à terme positif les sommes partielles divergent vers  $+\infty$  et donc  $\lim S_n = -\infty$ , ce qui est contradictoire avec la minoration  $S_n > x$  pour tout  $n \geq n_0$ .

b) La suite  $(p_n)$  est croissante et ne peut être majorée d'après la question précédente, donc  $(p_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

**I. C. 3)** Le raisonnement est analogue pour la suite  $(q_n)$  : cette suite est croissante donc si elle est majorée, elle converge et elle est stationnaire. Il existe donc un rang  $n_0$  à partir duquel  $S_n \leq x$ ,  $p_{n+1} = p_{n_0} + n + 1 - n_0$ ,  $\sigma_{n+1} = 2(p_{n_0} + n + 1 - n_0)$

et  $S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2(q_{n_0} + 2k + 2 - 2n_0)}$ . La divergence de  $\sum \frac{1}{k}$  entraîne  $\lim S_n = +\infty$ , en contradiction avec la majoration

$S_n \leq x$ . La suite  $(q_n)$  diverge donc vers  $+\infty$ .

**I. C. 4)** Considérons un entier quelconque  $m$ .

Si  $m$  est pair, il existe un entier  $n$  tel que  $2p_n \geq m$  puisque  $\lim p_n = +\infty$ . Mais alors  $m \in \{2, 4, \dots, 2p_n\}$  et d'après I.B,  $m \in \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$ , ce qui signifie qu'il existe un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\sigma(k) = m$ .

Si  $m$  est impair, il existe un entier  $n$  tel que  $2q_n - 1 \geq m$  puisque  $\lim q_n = +\infty$ . Mais alors  $m \in \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$  et d'après I.B,  $m \in \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$ , ce qui signifie qu'il existe un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\sigma(k) = m$ .

Nous venons de prouver que  $\sigma$  est surjective. L'injectivité a été prouvée à la question I.B, donc  $\sigma$  réalise une bijection de  $\mathbb{N}^*$  sur lui-même.

### I. D –

**I. D. 1)** Supposons  $x < S_n$ . Dans ce cas  $u_{\sigma(n+1)} < 0$  et  $S_{n+1} = S_n + u_{\sigma(n+1)} < S_n$ .

- Si  $x < S_{n+1}$  alors  $x < S_{n+1} < S_n$  donc  $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x|$ .
- Si  $x \geq S_{n+1}$  alors  $S_{n+1} \leq x < S_n$  donc  $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - S_{n+1}| = |u_{\sigma(n+1)}|$ .

Supposons  $x \geq S_n$ . Dans ce cas  $u_{\sigma(n+1)} > 0$  et  $S_{n+1} = S_n + u_{\sigma(n+1)} > S_n$ .

- Si  $x \geq S_{n+1}$  alors  $S_n < S_{n+1} \leq x$  donc  $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x|$ .
- Si  $x < S_{n+1}$  alors  $S_n \leq x < S_{n+1}$  donc  $|S_{n+1} - x| \leq |S_{n+1} - S_n| = |u_{\sigma(n+1)}|$ .

**I. D. 2)** Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un rang  $N$  à partir duquel on ait  $|S_{n+1} - x| > |u_{\sigma(n+1)}|$ . D'après la question précédente on a pour tout  $n \geq N$ ,  $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x|$ . Plus précisément, compte tenu de la preuve effectuée à la question précédente, on a pour tout  $n \geq N$ ,  $x < S_{n+1} < S_n$  ou  $S_n < S_{n+1} \leq x$ .

Ceci signifie que la suite  $(S_n)$  est monotone à partir du rang  $N$ , donc que l'une des deux suites  $(p_n)$  ou  $(q_n)$  est stationnaire, ce qui est exclu par la question I.C.

**I. D. 3)** La question I.C a montré que les suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  divergent vers  $+\infty$ ; il existe donc un rang  $n_0$  à partir duquel  $p_n \geq 1$  et  $q_n \geq 1$ .

**I. D. 4)** La question I.D.1 a montré que  $|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{\sigma(n+1)}|)$ . Or  $\sigma(n+1) = 2q_{n+1} - 1$  ou  $\sigma(n+1) = 2p_{n+1}$  donc  $|u_{\sigma(n+1)}| \leq \max(|u_{2q_{n+1}-1}|, |u_{2p_{n+1}}|)$  et ainsi  $|S_{n+1} - x| \leq v_n$ .

Par ailleurs, les suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  sont croissantes et la suite  $(|u_n|)$  décroissante donc  $|u_{2p_{n+2}}| \leq |u_{2p_{n+1}}| \leq v_n$  et  $|u_{2q_{n+2}-1}| \leq |u_{2q_{n+1}-1}| \leq v_n$ . De ceci il résulte que  $v_{n+1} \leq v_n$ .

Étant minorée par 0 cette suite converge vers une limite  $\ell \geq 0$ .

D'après la question I.D.2, pour tout  $N \geq n_0$  il existe un entier  $n > N$  tel que  $|S_{n+1} - x| \leq |u_{\sigma(n+1)}|$  avec pour conséquence  $v_n = \max(|u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|)$ . Ceci permet de construire une suite extraite telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{\phi(n)} = \max(|u_{2p_{\phi(n)+1}}|, |u_{2q_{\phi(n)+1}-1}|)$ . Sachant que les suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  divergent vers  $+\infty$  et que la suite  $(u_n)$  converge vers 0 on en déduit que  $\lim v_{\phi(n)} = 0$ , et par unicité de la limite on en déduit  $\ell = 0$ .

**I. D. 5)** Pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|S_n - x| \leq v_n$  et  $(v_n)$  converge vers 0 donc la suite  $(S_n)$  converge vers  $x$ .

La suite  $(S_n)$  est la suite des sommes partielles de la série  $\sum u_{\sigma(n)}$  donc nous avons prouvé que  $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)}$ , où  $\sigma$  est une bijection de  $\mathbb{N}^*$  dans lui-même; autrement dit nous avons montré qu'il est possible de réordonner les termes de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  pour obtenir n'importe quelle valeur réelle.

**I. E -**

**I. E. 1)** Posons  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ . On a  $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc la série  $\sum (u_n - u_{n-1})$  converge absolument. Par télescopage la suite  $(u_n)$  converge vers une limite notée  $\gamma$ .

On a pour tout  $k \geq 1$ ,  $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$  donc  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1)$  donc  $u_n \geq \ln(n+1) - \ln n \geq 0$ , ce qui prouve par passage à la limite que  $\gamma \geq 0$ .

**I. E. 2)** On a, en séparant termes pairs et impairs,  $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$  donc  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

D'après la question précédente,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \ln(2n) + \gamma - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + o(1) = \frac{1}{2} \ln n + \frac{\gamma}{2} + \ln 2 + o(1)$ .

**I. E. 3)**

a) D'après la question I.B,  $S_n = \sum_{k=1}^n u_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{p_n} u_{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} u_{2k-1} = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}$ .

b) Sachant que  $\lim p_n = \lim q_n = +\infty$  on a  $\sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} = \ln p_n + \gamma + o(1)$  et  $\sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2} \ln q_n + \frac{\gamma}{2} + \ln 2 + o(1)$  donc

$$S_n = \frac{1}{2} \ln p_n - \frac{1}{2} \ln q_n - \ln 2 + o(1) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) - \ln 2 + o(1) \quad \text{car } q_n = n - p_n.$$

c) Sachant que  $\lim S_n = x$  on a  $\lim \frac{p_n}{n-p_n} = 4e^{2x}$ . Si on pose  $\alpha_n = \frac{p_n}{n-p_n}$  on a  $p_n = \frac{n\alpha_n}{1+\alpha_n}$  donc  $p_n \sim \left(\frac{4e^{2x}}{1+4e^{2x}}\right)n$ .

De l'égalité  $q_n = n - p_n$  on déduit alors  $q_n \sim \left(\frac{1}{1+4e^{2x}}\right)n$ .

d) Tout comme en I.E.3a et 3b on a :

$$\sum_{k=1}^n |u_{\sigma(k)}| = \sum_{k=1}^{p_n} |u_{2k}| + \sum_{k=1}^{q_n} |u_{2k-1}| = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}(\ln p_n + \gamma) + \frac{1}{2} \ln q_n + \frac{\gamma}{2} + \ln 2 + o(1) = \frac{1}{2} \ln(p_n q_n) + \gamma + \ln 2 + o(1).$$

Ici on a juste besoin d'un équivalent :  $\sum_{k=1}^n |u_{\sigma(k)}| \sim \frac{1}{2} \ln(p_n q_n)$ . Or  $p_n q_n \sim \left(\frac{4e^{2x}}{(1+4e^{2x})^2}\right)n^2$  donc  $\ln(p_n q_n) \sim 2 \ln n$ .

On en déduit  $\sum_{k=1}^n |u_{\sigma(k)}| \sim \ln n$ . Mais on a aussi  $\sum_{k=1}^n |u_k| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n |u_{\sigma(k)}|}{\sum_{k=1}^n |u_k|} = 1$ .

## II Suites vérifiant $(P_1)$ et $(P_2)$

**II. A -** Si  $(u_n)$  est une suite bornée on a  $a_n u_n = O(|a_n|)$  donc si la série  $\sum a_n$  converge absolument, la série  $\sum a_n u_n$  converge absolument donc converge. On a montré que la suite  $(a_n)$  vérifie  $(P_1)$ .

**II. B -**

**II. B. 1)** Si la série  $\sum |a_{n+1} - a_n|$  converge il en est de même de  $\sum (a_{n+1} - a_n)$ , et par télescopage ( $a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$ ) la suite  $(a_n)$  converge.

**II. B. 2)** Il s'agit d'une transformation d'Abel :

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = a_0 S_0 + \sum_{n=1}^N a_n (S_n - S_{n-1}) = \sum_{n=0}^N a_n S_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} S_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) S_n + a_N S_N$$

Supposons que la série  $\sum u_n$  converge, autrement dit que la suite  $(S_n)$  possède une limite finie.

Une suite convergente est bornée donc  $(a_n - a_{n+1}) S_n = O(|a_{n+1} - a_n|)$  donc la série  $\sum (a_n - a_{n+1}) S_n$  converge absolument donc converge.

Par ailleurs, d'après la question II.B.1 la suite  $(a_n S_n)$ , produit de deux suites convergentes, est convergente.

Compte tenu de l'égalité que nous venons d'obtenir par transformée d'Abel on en déduit que la série  $\sum a_n u_n$  converge. Ainsi, la suite  $(a_n)$  vérifie  $(P_2)$ .

**II. C** – Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe un réel  $\theta_n$  tel que  $a_n = |a_n| e^{i\theta_n}$  (si  $a_n \neq 0$ ,  $\theta_n$  est un argument de  $a_n$ , si  $a_n = 0$  n'importe quel réel convient) et posons  $u_n = e^{-i\theta_n}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n u_n = |a_n|$  donc la série  $\sum a_n u_n$  diverge.

Nous avons montré en II.A que si  $\sum |a_n|$  converge la suite  $(a_n)$  vérifie  $(P_1)$  et nous venons de montrer en donnant un contre-exemple que si  $\sum |a_n|$  diverge la suite  $(a_n)$  ne peut vérifier  $(P_1)$ . Les suites qui vérifient  $(P_1)$  sont donc exactement les suites  $(a_n)$  pour lesquelles la série  $\sum a_n$  converge absolument.

**II. D** –

**II. D. 1)**

```
def serie(a):
    l = [[0, 1, a[0]]]
    for k in range(1, len(a)):
        [p, epsilon, A] = l[-1]
        if A >= p:
            p, epsilon = 1 + p, epsilon / 2
            A = A + a[k] * epsilon
            l.append([p, epsilon, A])
    return l
```

**II. D. 2)**

a) Supposons qu'il existe un rang  $N$  à partir duquel on ait toujours  $p_n = p_{n-1} = p_N$ . On a alors aussi  $\epsilon_n = \epsilon_{n-1} = \epsilon_N$  pour  $n \geq N$  et donc  $A_n = A_{n-1} + \epsilon_N a_n$  pour  $n \geq N$ .

On en déduit que  $A_n = A_N + \epsilon_N \sum_{k=N+1}^n a_k$ , et puisque la série  $\sum a_n$  diverge on a  $\lim A_n = +\infty$ . Mais alors il existe un rang  $n > N$  pour lequel  $A_n \geq p_{n-1} = p_N$ , ce qui a pour conséquence que  $p_n = 1 + p_{n-1}$ . Ceci est contradictoire avec l'hypothèse de départ, donc on peut affirmer que pour tout entier  $N$  il existe  $n > N$  tel que  $p_n = 1 + p_{n-1}$ .

Ceci montre que quel que soit  $n_k \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$  est non vide, donc possède un plus petit élément, ce qui justifie la définition récursive de la suite  $(n_k)$ .

b) Montrons par récurrence sur  $k$  que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p_{n_k} = k$ .

– C'est vrai pour  $k = 0$  puisque  $n_0 = 0$  et  $p_0 = 0$ .

– Si  $k \geq 0$ , supposons  $p_{n_k} = k$ . Par définition de la suite  $(n_k)$  on a pour tout  $i \in \llbracket n_k, n_{k+1} - 1 \rrbracket$   $p_i = p_{n_k} = k$  et  $p_{n_{k+1}} = p_{n_{k+1}-1} + 1 = k + 1$  donc la récurrence se propage.

Compte tenu de la définition conjointe des suites  $(n_k)$  et  $(\epsilon_k)$  on en déduit que  $\epsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}$ .

c) La suite  $(\epsilon_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc converge, et la question précédente nous donne une sous-suite qui tend vers 0 donc la suite  $(\epsilon_n)$  converge vers 0.

La suite  $(A_n)$  est la suite des sommes partielles de la série  $\sum \epsilon_n a_n$ . Or pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p_{n_k} = 1 + p_{n_k-1}$  donc  $A_{n_k-1} \geq p_{n_k-1} = p_{n_{k-1}} = k - 1$ . Ainsi,  $\lim A_{n_k-1} = +\infty$  et la suite  $(A_n)$  ne peut converger. La série  $\sum \epsilon_n a_n$  est donc divergente.

## II. E –

a) Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n \geq 0 \\ -1 & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$ . La suite  $(\alpha_n \epsilon_n)$  tend toujours vers 0 donc par hypothèse la série  $\sum \alpha_n \epsilon_n a_n = \sum \epsilon_n |a_n|$  converge.

b) Supposons la série (positive)  $\sum |a_n|$  divergente. D'après la question II.D il existe une suite  $(\epsilon_n)$  qui tend vers 0 et telle que la série  $\sum \epsilon_n |a_n|$  diverge. Mais ceci rentre en contradiction avec la question précédente, donc on peut en déduire que la série  $\sum |a_n|$  converge.

## II. F –

II. F.1) Supposons la suite  $(a_n)$  non bornée. Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n > N$  tel que  $|a_n| \geq 2^k$ . Ceci nous permet de construire par récurrence une suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)$  en posant :

$$\begin{cases} n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n| \geq 1\} \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_k \text{ et } |a_n| > 2^{k+1}\} \end{cases} \text{ pour } k \geq 0$$

Par construction cette sous-suite vérifie  $|a_{n_k}| \geq 2^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Considérons maintenant la suite  $(x_n)$  définie par  $x_n = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{si } n = n_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . La série  $\sum x_n$  converge car la série  $\sum \frac{1}{2^k}$  converge, mais pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|a_{n_k} x_{n_k}| \geq 1$  donc la suite

$(a_n x_n)$  ne tend pas vers 0 et par voie de conséquence la série  $\sum a_n x_n$  diverge.

Mais ceci n'est pas possible, donc on peut en conclure que la suite  $(a_n)$  est bornée.

II. F.2) Réalisons de nouveau une transformation d'Abel :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^n \epsilon_{k-1} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k a_k = \epsilon_{n-1} a_n + \sum_{k=1}^{n-1} (\epsilon_{k-1} - \epsilon_k) a_k - \epsilon_0 a_0$$

La suite  $(a_n)$  est bornée et la suite  $(\epsilon_n)$  tend vers 0 donc  $\lim \epsilon_{n-1} a_n = 0$ .

Par télescopage la série  $\sum (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n)$  converge donc par hypothèse la série  $\sum (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n) a_n$  converge.

On en déduit que la série  $\sum \epsilon_n (a_{n+1} - a_n)$  converge.

II. F.3) On peut dès lors appliquer la question II.E et en déduire que la série  $\sum |a_{n+1} - a_n|$  converge.

II. F.4) La question II.B a montré que si la série  $\sum |a_{n+1} - a_n|$  converge alors la suite  $(a_n)$  vérifie  $(P_2)$ . Nous venons de démontrer la réciproque dans cette question II.F, donc nous pouvons en conclure que les seules suites qui vérifient  $(P_2)$  sont les suites  $(a_n)$  telles que la série  $\sum |a_{n+1} - a_n|$  converge.

# Extrait du rapport du jury

L'épreuve de Mathématiques I proposée cette année portait exclusivement sur les propriétés des séries numériques. La première partie faisait voir que, lorsqu'on permute l'ordre des termes dans la série harmonique alternée, on peut obtenir une série convergente vers n'importe quel réel choisi à l'avance. La seconde partie donnait une caractérisation des séries de terme général  $a_n$  telles que la série de terme général  $a_n u_n$  converge lorsque  $u_n$  est une suite bornée ou bien lorsque  $u_n$  est le terme général d'une série convergente. L'énoncé donnait une place importante à l'écriture d'algorithmes permettant de mettre en évidence numériquement les propriétés théoriques des séries considérées.

## Analyse globale des résultats

L'énoncé étant assez long, une majorité de candidats a délaissé certaines questions (notamment, les questions I.D.1-5) qui constituaient des étapes cruciales dans la progression vers le résultat de la partie I.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Les correcteurs ont remarqué tout particulièrement les erreurs suivantes, qui semblent poser des difficultés à la majorité des candidats. Il s'agit pourtant de questions de base relatives aux suites ou séries numériques, que les futurs candidats sont invités à approfondir :

1. si  $v_n$  tend vers  $\ell$ , alors  $v_n = \ell$  à partir d'un certain rang ;
2. si  $u_n$  est décroissante et minorée par 0, alors  $u_n$  converge vers 0 ;
3. si  $a_{n+1} - a_n$  tend vers 0, alors  $a_n$  converge ;
4. si la série de terme général  $a_n$  converge, alors  $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  ;
5. toute suite convergente d'entiers est monotone à partir d'un certain rang (énoncé non justifié et utilisé pour répondre à la question I.C.1) ;
6. si  $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| + |u_{\sigma(n)}|$ , alors  $|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{\sigma(n)}|)$  ;
7. pour traiter la question I.C.1, de nombreux candidats admettent sans justification le fait que la limite d'une suite d'entiers est un entier ;
8.  $p_n$  tend vers l'infini et  $q_n = n - p_n$  alors  $q_n$  tend vers l'infini ;
9. si  $\sigma$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  « vérifiant  $\text{Ker}(\sigma) = \{0\}$  », alors  $\sigma$  est injective (cet énoncé n'a ici aucun sens puisque  $\sigma$  n'est pas une application linéaire).

Les énoncés 1 à 4 sont des erreurs classiques sur les suites et séries numériques, qu'il est facile d'éviter en ayant bien assimilé la partie du cours portant sur ce thème. L'énoncé 5 est essentiellement équivalent à ce qu'il fallait démontrer et n'apporte rien. L'erreur 6 est une grave étourderie, puisqu'elle consiste à affirmer que  $|a| + |b| \leq \max(|a|, |b|)$ . Pour éviter ce genre d'erreur, il suffit de tester ce que l'on écrit sur un exemple numérique simple (par exemple  $a = b = 1$ ). Les points 7 à 9 sont plus spécifiques au sujet de cette année.

## Conclusion

Les correcteurs considèrent que la rédaction de la plupart des copies laisse beaucoup à désirer. Les futurs candidats doivent absolument faire des efforts particuliers en ce sens, et apprendre à rédiger de manière à la fois concise et précise. En effet, un raisonnement obscur, où certains arguments sont omis, mal compris ou même seulement imprécis, est toujours dévalorisé de façon significative par la notation. En outre, une rédaction claire des questions ou étapes intermédiaires d'un raisonnement aide les candidats eux-mêmes à mieux en comprendre le déroulement. Les correcteurs encouragent donc les élèves de classes préparatoires à progresser dans cette direction.