Racines carrées d'un endomorphisme (CCP PC 2010)

Durée : 4 heures

Notations et objectifs

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombre réels.
$\mathcal{L}(\mathrm{E})$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $\mathcal{GL}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.
On note 0 l'endomorphisme nul et Id l'application identité.
Pour tout endomorphisme f, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f.
L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\mathrm{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \left\{h \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \;\middle|\; h^2 = f\right\}$$

$\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Étant donné $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ donné par $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \mathrm{X}^k$, on définit $\mathrm{P}(f) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ par :

$$\mathrm{P}(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k, \quad \text{où } f^0 = \mathrm{Id} \text{ et pour } k \in \mathbb{N}^*,\ f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{1 \leqslant i \leqslant q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

Partie I.

A. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 1. Montrer que f est diagonalisable.

Question 2. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f, et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.

Question 3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3), et un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.

Question 4. Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.

Question 5. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2.

Question 6. Montrer que si $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{H}^2 = \mathrm{D}$, alors H et D commutent.

Question 7. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{H}^2 = \mathrm{D}$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$, en donnant leur matrice dans la base canonique.

B. On désigne désormais par f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 8. Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

Question 9. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{Id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

Question 10. Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

Question 11. Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$, et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

Question 12. Après avoir calculé p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q, qui vérifient $h^2 = f$.

Question 13. Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.

Question 14. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non diagonale, telle que $\mathrm{K}^2 = \mathrm{I}$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, non diagonale, telle que $\mathrm{Y}^2 = \mathrm{D}$.

Question 15. En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

Question 16. Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

Partie II.

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q tels que $\lambda \neq \mu$ et :

$$\begin{cases} \mathrm{Id} = p + q \\ f = \lambda p + \mu q \\ f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q \end{cases}$$

Question 17. Calculer $(f - \lambda \mathrm{Id}) \circ (f - \mu \mathrm{Id})$, et en déduire que f est diagonalisable.

Question 18. Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.

Question 19. Déduire de la relation trouvée à la question 17 que $p \circ q = q \circ p = 0$, puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

On suppose jusqu'à la fin de la partie que λ et μ sont strictement positifs.

Question 20. Montrer que f est un isomorphisme, et exprimer f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.

Question 21. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.

Question 22. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ engendré par p et q. Déterminer la dimension de F.

Question 23. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap \mathrm{F}$.

Question 24. Soit $k \geqslant 2$ un entier naturel. Déterminer une matrice $\mathrm{K} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, non diagonale, et vérifiant $\mathrm{K}^2 = \mathrm{I}$.

Question 25. Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ n'appartenant pas à F et vérifiant : $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

Question 26. En déduire que si $\dim \mathrm{E} \geqslant 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset \mathrm{F}$.

Partie III.

Soient $p_1,\dots,p_m$ des endomorphismes non nuls de E, et $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ des nombres réels distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$: $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$.

Question 27. Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(f) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}(\lambda_i) p_i$.

Question 28. En déduire que $\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i \mathrm{Id}) = 0$, puis que f est diagonalisable.

Question 29. Pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant m$, on considère le polynôme $\mathrm{L}_j(\mathrm{X}) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ i \neq j}} \frac{\mathrm{X} - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$.

Montrer que pour tout $j \in [\![1, m]\!]$ $p_j = \mathrm{L}_j(f)$. En déduire que $\mathrm{Im}(p_j) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_j \mathrm{Id})$, puis que le spectre de f est : $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

Question 30. Vérifier que pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2$, $p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}$.

Question 31. Justifier que la somme $\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ est directe et égale à E, et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les p_i.

Question 32. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ engendré par $(p_1, \dots, p_m)$. Déterminer la dimension de F.

Question 33. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap \mathrm{F}$ lorsque les λ_i sont positifs ou nuls.

Question 34. Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.
Préciser la dimension des sous-espaces propres de f, puis montrer que si $h \in \mathcal{R}(f)$, tout vecteur propre de f est également vecteur propre de h.
En déduire que $\mathcal{R}(f) \subset \mathrm{F}$, et donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide.

Question 35. Montrer que si $m < n$, et si tous les λ_i sont positifs ou nuls, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset \mathrm{F}$.

Partie IV.

A. Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ vérifiant $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

Question 36. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ non nul tel que la famille $\left(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre, et en déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.

Question 37. Montrer que si $\mathcal{R}(f) \neq \varnothing$, alors $2p - 1 \leqslant n$.

Question 38. Déterminer les réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \mathrm{O}(x^n)$ au voisinage de 0.

Dans la suite du problème, P_n désigne le polynôme $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$.

Question 39. Montrer qu'il existe une fonction η bornée au voisinage de 0 telle que l'on ait $\mathrm{P}_n(x)^2 - x - 1 = x^n \eta(x)$, et en déduire que X^n divise $\mathrm{P}_n^2 - \mathrm{X} - 1$.

Question 40. Montrer alors que $\mathcal{R}(f + \mathrm{Id}) \neq \varnothing$. Plus généralement, montrer que pour tout réel α on a $\mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{Id}) \neq \varnothing$, puis que pour tout réel β strictement positif, $\mathcal{R}(f + \beta \mathrm{Id}) \neq \varnothing$.

B. Soit $\mathrm{T} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ.

Question 41. Montrer que $(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I})^n = 0$.

Question 42. On suppose que g est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre λ. Déduire de la question précédente que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(g - \lambda \mathrm{Id})^n$.

Question 43. Montrer que si $\lambda > 0$, alors $\mathcal{R}(g) \neq \varnothing$.