Corrigé : racines carrées d'un endomorphisme (CCP PC 2010)

Partie I.

A.

Question 1. On calcule $\det(xI_3 - A) = x(x-1)(x-4)$ donc $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 1, 4\}$. L'endomorphisme f possède trois sous-espaces propres de dimension 1 (les trois racines du polynôme caractéristique sont simples) donc est diagonalisable.

Question 2. Pour chacune des trois valeurs propres trouvées, on résout le système linéaire $(A - \lambda I)X = 0$; on obtient trois vecteurs engendrant les trois sous-espaces propres, par exemple $v_1 = (-1, 2, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (-1, 1, 0)$.
Ainsi, $D = \mathrm{Mat}_{(v)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

Question 3. Posons donc $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; on a $A = PDP^{-1}$ donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A^m = PD^mP^{-1}$.

Question 4. On calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ puis $A^m = \begin{pmatrix} 2.4^m & 4^m & 1-2.4^m \\ -2.4^m & -4^m & 2.4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 5. Posons *a priori* $H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Le calcul de $HD - DH = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ -d & 0 & 3f \\ -4g & -3h & 0 \end{pmatrix}$ montre que H commute avec D si et seulement si $H = \begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Question 6. Si $H^2 = D$, alors $HD = D^3 = DH$ donc D et H commutent.

Question 7. Les matrices H qui vérifient : $H^2 = D$ sont donc nécessairement diagonales, ce qui permet de poser *a priori* $H = \begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix}$. L'équation $H^2 = D$ se résume alors au système : $\begin{cases} a^2 = 0 \\ e^2 = 1 \\ i^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ e = \pm 1 \\ i = \pm 2 \end{cases}$, ce qui donne quatre solutions.
Si $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $h^2 = f$, sa matrice $H = \mathrm{Mat}_{(v)}(h)$ vérifie $H^2 = D$ donc est l'une des quatre matrices trouvées ci-dessus, et la matrice dans la base canonique est donnée par le calcul de PHP^{-1}.
Les quatre solutions sont donc (après calcul) $\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\pm \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B.

Question 8. $J^2 = 3J$ donc pour tout $m \geqslant 1$, $J^m = 3^{m-1}J$.

Question 9. Nous venons de constater que le polynôme $M = X^2 - 3X = X(X-3)$ annule l'endomorphisme j ; sachant que $f = j + \mathrm{Id}$ nous allons calculer f^m en effectuant la division euclidienne de $(X+1)^m$ par $M = X(X-3)$.
Posons $(X+1)^m = X(X-3)Q(X) + aX + b$. Alors $0a + b = 1$ et $3a + b = 4^m$ donc $a = \dfrac{4^m - 1}{3}$ et $b = 1$.
En substituant nous avons donc $(j + \mathrm{Id})^m = aj + b\mathrm{Id}$ ce qui donne : $f^m = \mathrm{Id} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$, formule toujours vraie pour $m = 0$.

Question 10. j admet 0 et 3 pour valeurs propres, donc $f = \mathrm{Id} + j$ admet $\lambda = 1$ et $\mu = 4$ comme valeurs propres.

Question 11. Si on pose $p = \mathrm{Id} - \frac{1}{3}j$ et $q = \frac{1}{3}j$, la formule obtenue à la question 9 donne : $\forall m \in \mathbb{N}$, $f^m = p + 4^m q$. Ce couple est nécessairement unique car solution du système de Cramer : $\begin{cases} \mathrm{Id} = p + q \\ f = p + 4q \end{cases}$.
Enfin, la famille (p, q) est libre car la famille (Id, j) est libre et $\mathrm{Mat}_{(\mathrm{Id},j)}(p, q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible.

Question 12. On calcule $p^2 = \left(\mathrm{Id} - \frac{1}{3}j\right)^2 = \mathrm{Id} - \frac{2}{3}j + \frac{1}{9}j^2 = \mathrm{Id} - \frac{1}{3}j = p$, $q^2 = \frac{9}{j}^2 = \frac{1}{3}j = q$, et $p \circ q = q \circ p = 0$ car le polynôme $\mathrm{X}(\mathrm{X}-3)$ annule j.
Posons alors $h = \alpha p + \beta q$. D'après ce qui précède, $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$ et puisque (p, q) est libre, $h^2 = f \iff \alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$, soit $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \pm 2$. Nous avons donc quatre solutions : $h = \pm p \pm 2q$.

Question 13. Commençons par montrer que j est diagonalisable : si on pose $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nous avons $j(v_1) = j(v_2) = 0_{\mathrm{E}}$ et $j(v_3) = 3v_3$ donc $\mathrm{Mat}_{(v)}(j) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

Sachant que $f = \mathrm{Id} + j$ nous avons $\mathrm{D} = \mathrm{Mat}_{(v)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$; f est bien diagonalisable.

Sachant enfin que $p = \mathrm{Id} - \frac{1}{3}j$ et $q = \frac{1}{3}j$ on a aussi $\mathrm{Mat}_{(v)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{(v)}(q) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$; il s'agit des projecteurs spectraux de f (et de j).

Question 14. La matrice $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $\mathrm{K}^2 = \mathrm{I}$ et n'est pas diagonale. La matrice $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonale et vérifie $\mathrm{Y}^2 = \mathrm{D}$.

Question 15. Considérons l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\mathrm{Mat}_{(v)}(h) = \mathrm{Y}$. Il vérifie $h^2 = f$ sans qu'il soit combinaison linéaire de p et de q, car si c'était le cas la matrice $\mathrm{Mat}_{(v)}(h)$ serait diagonale. Les solutions trouvées à la question 12 ne sont donc pas les seules.

Question 16. f est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 4\}$, donc le polynôme $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-4)$ annule f. Un endomorphisme h vérifiant $h^2 = f$ sera donc annulé par le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = (\mathrm{X}^2-1)(\mathrm{X}^2-4) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}+2)$. Ce dernier polynôme est scindé à racines simples, donc h est diagonalisable.

Partie II.

Question 17. On calcule $(f - \lambda\mathrm{Id}) \circ (f - \mu\mathrm{Id}) = f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu\mathrm{Id} = (\lambda^2 p + \mu^2 q) - (\lambda + \mu)(\lambda p + \mu q) + \lambda\mu(p + q) = 0$.
L'endomorphisme f est annulé par un polynôme scindé à racines simples (on a supposé $\lambda \neq \mu$) donc f est diagonalisable.

Question 18. Connaissant un polynôme annulateur de f nous pouvons déjà affirmer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{\lambda, \mu\}$. Si λ n'était pas valeur propre de f, nous aurions $f = \mu\mathrm{Id}$ et les relations $\mu\mathrm{Id} = \mu p + \mu q$ et $f = \lambda p + \mu q$ imposeraient $(\lambda - \mu)p = 0$, puis $p = 0$, ce qui n'est pas possible (on a supposé p et q non nuls). λ est donc valeur propre de f, ainsi que μ pour des raisons analogues.

Question 19. Les relations $\begin{cases} \mathrm{Id} = p + q \\ f = \lambda p + \mu q \end{cases}$ se résolvent en $p = \dfrac{f - \mu\mathrm{Id}}{\lambda - \mu}$ et $q = \dfrac{f - \lambda\mathrm{Id}}{\mu - \lambda}$.
La relation obtenue à la question 17 implique donc $q \circ p = 0$, et aussi $p \circ q = 0$ car les polynômes en f commutent entre eux.
Par ailleurs, $p^2 = \dfrac{1}{(\lambda-\mu)^2}(f - \mu)^2 = \dfrac{1}{(\lambda-\mu)^2}(f^2 - 2\mu f + \mu^2\mathrm{Id}) = \dfrac{1}{(\lambda-\mu)^2}\left(\lambda^2 p + \mu^2 q - 2\mu(\lambda p + \mu q) + \mu^2(p+q)\right) = p$, et par un calcul analogue, $q^2 = q$.

Question 20. Posons $g = \frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q$. Les relations obtenues entre p et q donnent $f \circ g = p + q = \mathrm{Id}$, donc f est inversible et $f^{-1} = g$.

Question 21. On prouve sans peine par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$, puis, en calculant $f^m \circ \left(\frac{1}{\lambda^m} p + \frac{1}{\mu^m} q\right) = \mathrm{Id}$, que cette relation reste valable pour $m \in \mathbb{Z}$.

Question 22. Montrons que la famille (p, q) est libre : en effet, s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha p + \beta q = 0$ alors en composant par p on obtient : $\alpha p = 0$, donc $\alpha = 0$ car $p \neq 0$, et en composant par q : $\beta q = 0$, donc $\beta = 0$. F est donc de dimension 2.

Question 23. Posons $h = \alpha p + \mu q$. Alors $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$, et $h^2 = f \iff (\alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = \mu)$ car la famille (p, q) est libre. On obtient donc quatre solutions : $h = \pm\sqrt{\lambda} p \pm \sqrt{\mu} q$. Ainsi, $\mathcal{R}(f) \cap \mathrm{F} = \left\{\pm\sqrt{\lambda} p \pm \sqrt{\mu} q\right\}$.

Question 24. La matrice $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonale et vérifie $\mathrm{K}^2 = \mathrm{I}$.

Question 25. Considérons une base $(e_1, \ldots, e_k, \ldots, e_n)$ de E formées de vecteurs propres $(e_1, \ldots, e_k)$ pour la valeur propre λ et de vecteurs propres $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ pour la valeur propre μ.
Alors $\mathrm{Mat}_{(e)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mu \mathrm{I} \end{pmatrix}$, $\mathrm{Mat}_{(e)}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{(e)}(q) = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{pmatrix}$.
Si $k \geqslant 2$, nous pouvons considérer l'endomorphisme p' défini par : $\mathrm{Mat}_{(e)}(p') = \begin{pmatrix} \mathrm{K} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$. Nous avons $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$, et $p' \notin \mathrm{F}$ car tout endomorphisme de F est diagonalisable dans la base (e), ce qui n'est pas le cas de p'.

Question 26. Si $\dim \mathrm{E} \geqslant 3$, l'une des deux valeurs propres de f est de multiplicité au moins égale à 2. Sans perte de généralité, on peut considérer qu'il s'agit de λ, ce qui permet de considérer l'endomorphisme p' défini ci-dessus. Posons alors $h = \sqrt{\lambda} p' + \sqrt{\mu} q$. Nous avons $h^2 = \lambda p + \mu q = f$ et $h \notin \mathrm{F}$ car $p' \notin \mathrm{F}$. Ceci prouve que $\mathcal{R}(f) \not\subset \mathrm{F}$.

Partie III.

Question 27. Posons $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k$. Alors $\mathrm{P}(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}(\lambda_i) p_i$.

Question 28. En particulier, pour $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \lambda_1) \cdots (\mathrm{X} - \lambda_k)$ on obtient $\mathrm{P}(f) = 0$. Le polynôme P étant scindé à racines simples, on en déduit que f est diagonalisable.

Question 29. Sachant que $\mathrm{L}_j(\lambda_i) = \delta_{ij}$, on a $\mathrm{L}_j(f) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{L}_j(\lambda_i) p_i = p_j$.

La relation obtenue à la question 28 peut s'écrire : $(f - \lambda_j \mathrm{Id}) \circ p_j = 0$ et implique que $\mathrm{Im}\, p_j \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_j \mathrm{Id})$. Puisque $p_j \neq 0$, on a $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda_j \mathrm{Id}) \geqslant 1$, ce qui prouve que λ_j est valeur propre de f. Réciproquement, toute valeur propre est racine du polynôme annulateur trouvé à la question 28, donc $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.

Question 30. Posons $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \lambda_1) \cdots (\mathrm{X} - \lambda_k)$, polynôme annulateur de f. Si $i \neq j$ le polynôme P divise $\mathrm{L}_i \mathrm{L}_j$ donc $(\mathrm{L}_i \mathrm{L}_j)(f) = 0$, soit encore : $\mathrm{L}_i(f) \circ \mathrm{L}_j(f) = 0$, c'est à dire : $p_i \circ p_j = 0$.
Par ailleurs, $\mathrm{Id} = \sum_{i=1}^{m} p_i$ donc en composant par p_j on obtient : $p_j = \sum_{j=1}^{m} p_i \circ p_j = p_j^2$.

Question 31. Nous avons prouvé que f est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, donc $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$. Les projecteurs spectraux associés à cette décomposition vérifient la relation : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$, et la question 29 prouve l'unicité de ces endomorphismes ; il s'agit bien des p_i.

Question 32. Montrons que la famille $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre : s'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i = 0$ on obtient en composant par p_j : $\alpha_j p_j = 0$, donc $\alpha_j = 0$ car $p_j \neq 0$. On en déduit que $\dim \mathrm{F} = m$.

Question 33. Posons $h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i$. Alors $h^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 p_i$, donc $h^2 = f$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, $\alpha_i^2 = \lambda_i$. Nous avons $\mathcal{R}(f) \cap \mathrm{F} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i \sqrt{\lambda_i} p_i \;\middle|\; (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) \in \{-1,1\}^m \right\}$.

Question 34. Lorsque $m = n$, chacun des sous-espaces propres est de dimension 1.

Si $h^2 = f$ alors f et h commutent (car $f \circ h = h^3 = h \circ f$). Considérons alors un vecteur propre x de f pour la valeur propre λ : $f(x) = \lambda x$. Alors $f \circ h(x) = h \circ f(x) = h(\lambda x) = \lambda h(x)$, donc $h(x) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$. Mais nous venons de constater que ce sous-espace propre est de dimension 1 ; il est donc engendré par le vecteur x, et ceci prouve qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = \alpha x$.

Si $h \in \mathcal{R}(f)$, toute base de vecteurs propres de f est aussi base de vecteurs propres de h, donc h est diagonalisable sur cette base. Par définition des projecteurs spectraux, nous avons donc $h \in \mathrm{Vect}(p_1, \dots, p_m) = \mathrm{F}$, ce qui prouve que $\mathcal{R}(f) \subset \mathrm{F}$.

On peut donc poser $h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i$, et la relation $h^2 = f$ est équivalente à : $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\alpha_i^2 = \lambda_i$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ est que toutes les valeurs propres λ_i de f soient positives ou nulles.

Question 35. Si $m < n$, l'un des sous-espaces propres au moins est de dimension supérieure ou égale à 2. Sans perte de généralité, supposons qu'il s'agisse de λ_1. Soit alors (e) une base formée de vecteurs propres de f, et telle que e_1 et e_2 soient des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_1.
Posons pour faciliter les notations $f(e_i) = \mu_i e_i$ pour $i \geqslant 3$. Alors l'endomorphisme h défini par :

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(h) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda_1} & & & \\ \sqrt{\lambda_1} & 0 & & & \\ & & \sqrt{\mu_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$$

vérifie $h^2 = f$ et $h \notin \mathrm{F}$, donc $\mathcal{R}(f) \not\subset \mathrm{F}$.

Partie IV. Quatrième partie

A.

Question 36. Puisque $f^{p-1} \neq 0$, il existe un vecteur x de E vérifiant $f^{p-1}(x) \neq 0_\mathrm{E}$.

Supposons qu'on ait : $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k f^{k-1}(x) = 0_\mathrm{E}$. Si l'un des λ_k n'est pas nul, on peut considérer le plus petit k_0 de ces entiers.

Nous avons alors $\sum_{k=k_0}^{p-1} \lambda_k f^{k-1}(x) = 0_\mathrm{E}$, et en composant par f^{p-k_0} cette égalité se réduit à $\lambda_0 f^{p-1}(x) + 0_\mathrm{E} = 0_\mathrm{E}$, ce qui est contradictoire puisque $\lambda_{k_0} \neq 0$ et $f^{(p-1}(x) \neq 0_\mathrm{E}$. Tous les λ_k sont donc nuls, ce qui prouve que la famille est libre.
Une famille libre ayant au plus n éléments, on en déduit que $p \leqslant n$, et donc que $f^n = 0$ puisque X^p divise X^n.

Question 37. S'il existe un endomorphisme h vérifiant $h^2 = f$, alors $h^{2p} = f^p = 0$ et $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$.
Si $h^{2p-1} = 0$, nous avons $h^{2p-2} \neq 0$ et $h^{2p-1} = 0$ donc d'après la question précédente appliquée à h, $2p - 1 \leqslant n$.
Si $h^{2p-1} \neq 0$, nous avons $h^{2p-1} \neq 0$ et $h^{2p} = 0$ donc d'après la question précédente appliquée à h, $2p \leqslant n$.
Dans les deux cas, on peut affirmer que $2p - 1 \leqslant n$.

Question 38. Nous savons que $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \mathrm{O}(x^n)$ avec $a_0 = 1$ et pour $k \geqslant 1$,

$$a_k = \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} - 1) \times \cdots \times (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} = (-1)^{k-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-3)}{2^k k!} = (-1)^{k-1} \frac{(2k-2)!}{2k\Big(2^{k-1}(k-1)!\Big)^2}$$

Question 39. En élevant cette relation au carré on obtient : $1+x = \mathrm{P}_n(x)^2 + \mathrm{O}(x^n)$ donc $\mathrm{P}_n(x)^2 - 1 - x = \mathrm{O}(x^n)$, ce qui signifie que $\mathrm{P}_n(x)^2 - 1 - x = x^n \eta(x)$, où η est une fonction bornée au voisinage de 0.
Par ailleurs, $\mathrm{P}_n(\mathrm{X})^2 - 1 - \mathrm{X}$ est un polynôme, donc si α désigne la multiplicité de 0 pour ce polynôme, on peut poser $\mathrm{P}_n(\mathrm{X})^2 - 1 - \mathrm{X} = \mathrm{X}^\alpha \mathrm{Q}(\mathrm{X})$, avec $\mathrm{Q}(0) \neq 0$. On a alors $\dfrac{\mathrm{P}_n(x)^2 - 1 - x}{x^n} = x^{\alpha - n}\mathrm{Q}(x)$, et cette expression n'est bornée au voisinage de 0 que si $\alpha \geqslant n$. Nous avons donc prouvé que X^n divise $\mathrm{P}_n^2 - \mathrm{X} - 1$.

Question 40. Posons $\mathrm{P}_n^2 - \mathrm{X} - 1 = \mathrm{X}^n \mathrm{Q}$ et $h = \mathrm{P}_n(f)$. Alors $h^2 - f - \mathrm{Id} = f^n \mathrm{Q}(f) = 0$ car $f^n = 0$, et donc $h \in \mathcal{R}(f + \mathrm{Id})$, qui est non vide.
Nous avons $\mathrm{P}_n(\alpha \mathrm{X})^2 - \alpha \mathrm{X} - 1 = \alpha^n \mathrm{X}^n \mathrm{Q}(\alpha \mathrm{X})$; si on pose $g = \mathrm{P}_n(\alpha f)$ on a : $g^2 - \alpha f - \mathrm{Id} = \alpha^n f^n \mathrm{Q}(\alpha f) = 0$ donc $\mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{Id}) \neq \emptyset$.
Enfin, en posant $\alpha = \dfrac{1}{\beta}$ on vient de prouver qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $g^2 = \dfrac{1}{\beta} f + \mathrm{Id}$, ce qui prouve que $\sqrt{\beta} g \in \mathcal{R}(f + \beta \mathrm{Id})$, qui est donc non vide.

B.

Question 41. Considérons une base (e) de E ainsi que l'endomorphisme f défini par $\mathrm{Mat}_{(e)}(f) = \mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}$. Par hypothèse, $\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}$ est triangulaire supérieure stricte, ce qui traduit le fait que : $f(e_1) = 0_\mathrm{E}$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$.
On prouve alors par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ que : $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $f^k(e_i) = 0_\mathrm{E}$ et $\forall i \in [\![k+1, n]\!]$, $f^k(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-i})$.
En particulier on aura pour $k = n$: $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f^n(e_i) = 0$, soit $f^n = 0$.

Question 42. Puisque le polynôme caractéristique de g est scindé, g est trigonalisable : il existe une base (e) telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(g) = \mathrm{T}$ est triangulaire supérieure.
La matrice T et l'endomorphisme g ont mêmes valeurs propres, donc λ est la seule valeur propre de T ; sa diagonale est donc constituée uniquement du coefficient λ.
D'après la question précédente, $(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I})^n = 0$, ce qui prouve : $(g - \lambda \mathrm{Id})^n = 0$, c'est à dire : $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(g - \lambda \mathrm{Id})^n$.

Question 43. Posons $f = g - \lambda \mathrm{Id}$. Nous avons $f^n = 0$, donc si $\lambda > 0$, la question 40 a prouvé que $\mathcal{R}(f + \lambda \mathrm{Id})$ n'est pas vide, autrement dit que $\mathcal{R}(g) \neq \emptyset$.