Polynômes de Tchebychev

Durée : quatre heures

Ce problème est constitué de trois parties. Les parties II et III sont mutuellement indépendantes.

Partie I. Polynômes de Tchebychev de première espèce

On appelle *polynômes de Tchebychev de première espèce* la suite de polynômes (T_n) de $\mathbb{R}[X]$ définie par les relations :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \tag{1}$$

Question 1.

a) Calculer les polynômes T_2, T_3 et T_4.

b) Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le degré et le coefficient dominant du polynôme T_n.

c) Étudier la parité de T_n ; on distinguera deux cas, selon que n est pair ou impair.

d) Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.

Question 2.

a) Montrer que T_n vérifie la relation : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

b) Peut-il exister un autre polynôme vérifiant la même relation ?

Question 3. Dans cette question uniquement on suppose que l'entier n est non nul.

a) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $T_n(\cos\theta) = 0$?

b) Montrer que T_n possède n racines réelles distinctes dans l'intervalle $[-1,1]$, et en déduire que T_n est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

c) En déduire des expressions simples fonction de n des réels :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \cos\Big(\frac{2k+1}{2n}\pi\Big) \qquad \text{et} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\Big(\frac{2k+1}{2n}\pi\Big).$$

Question 4.

a) Montrer que T_n est solution, sur l'intervalle $[-1,1]$, de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \tag{2}$$

Indication. *On pourra commencer par dériver deux fois la relation :* $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

b) Le polynôme T_n est-il solution de l'équation différentielle (2) sur $\mathbb{R}$?

Partie II. Polynômes de Tchebychev de seconde espèce

On appelle *polynômes de Tchebychev de seconde espèce* la suite de polynômes (U_n) de $\mathbb{R}[X]$ définie par les relations :

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 2X \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n \tag{3}$$

Question 5.

a) Calculer U_2, U_3 et U_4.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{1}{n+1} T'_{n+1}$, et en déduire que U_n est un polynôme scindé à racines simples.

d) Démontrer enfin que $T_{n+1} = U_{n+1} - XU_n$, et en déduire que $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^{n-k} T_k$.

Question 6. Dans cette question et la suivante, on fixe un réel $x \in \mathbb{R}$ et on considère la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{1}{1-2xt+t^2}$.

a) Donner en fonction de la valeur de x l'ensemble de définition $\mathcal{D}_x$ de la fonction f_x.

b) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction f_x possède un développement limité à tout ordre en $t = 0$.

c) Prouver que ce développement limité d'ordre n en $t = 0$ s'écrit : $f_x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{U}_k(x)t^k + \mathrm{o}(t^n)$.

Indication*. On pourra poser* a priori $f_x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)t^n + \mathrm{o}(t^n)$ *et utiliser la relation* $(1-2xt+t^2)f_x(t) = 1$.

d) En déduire le développement limité à l'ordre 4 en $t = 0$ de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^2}$.

Question 7. Rédiger en Python une fonction `developpement(x, n)` qui prend pour arguments un réel x et un entier n et qui renvoie la liste $[\mathrm{U}_0(x), \mathrm{U}_1(x), \dots, \mathrm{U}_n(x)]$ des coefficients du développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction f_x.

Partie III. Interpolation de Lagrange aux points de Tchebychev

Dans toute cette partie on suppose $n \geqslant 1$. Pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ on note $\mathrm{M}(\mathrm{P})$ le maximum de la fonction $x \mapsto \left|\mathrm{P}(x)\right|$ sur le segment $[-1, 1]$. Le but de cette partie est de calculer la valeur minimale de $\mathrm{M}(\mathrm{P})$ lorsque P est un polynôme unitaire de degré n.

Rappel. On appelle polynôme *unitaire* un polynôme non nul dont le coefficient dominant est égal à 1.

Question 8. Dans cette question on considère la fonction $\phi :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que ϕ réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$.

b) Prouver que $\mathrm{T}_n\big(\phi(x)\big) = \dfrac{1}{2}\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)$.

c) En déduire que pour tout $x > 1$ on a $\mathrm{T}_n(x) > 1$, puis montrer que pour $x > 1$ on a $\mathrm{T}_n(x) \leqslant 2^{n-1}x^n$.

Question 9. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on pose $x_k = \cos\left(\dfrac{(n-k)\pi}{n}\right)$. On observera que $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$.

On définit aussi pour $k \in [\![0, n]\!]$ le polynôme $\mathrm{L}_k = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\mathrm{X} - x_j}{x_k - x_j} = \left(\frac{\mathrm{X} - x_0}{x_k - x_0}\right) \cdots \left(\frac{\mathrm{X} - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)\left(\frac{\mathrm{X} - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right) \cdots \left(\frac{\mathrm{X} - x_n}{x_k - x_n}\right)$.

a) Calculer $\mathrm{L}_k(x_i)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $0 \leqslant i \leqslant n$ en distinguant les cas $i \neq k$ et $k = i$.

b) Établir que la famille $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Indication*. On pourra commencer par montrer qu'il s'agit d'une famille libre.*

c) Déterminer quelles sont, dans cette base, les composantes d'un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

d) Calculer $\mathrm{T}_n(x_k)$ et en déduire la décomposition du polynôme T_n dans cette base.

Question 10.

a) Établir, pour $x \geqslant 1$ et $k \in [\![0, n]\!]$, l'inégalité $(-1)^{n-k}\mathrm{L}_k(x) \geqslant 0$ et en déduire, pour $x \geqslant 1$, l'égalité :

$$\mathrm{T}_n(x) = \left|\mathrm{L}_0(x)\right| + \left|\mathrm{L}_1(x)\right| + \cdots + \left|\mathrm{L}_{n-1}(x)\right| + \left|\mathrm{L}_n(x)\right|.$$

b) Montrer que pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ on a :

$$\forall x \geqslant 1, \qquad \left|\mathrm{P}(x)\right| \leqslant \mathrm{M}(\mathrm{P})\mathrm{T}_n(x). \tag{4}$$

c) À l'aide de l'inégalité (4) établir successivement que l'on a, pour $x \geqslant 1$ et pour tout polynôme P unitaire de degré n : $\mathrm{M}(\mathrm{P}) \geqslant \dfrac{|\mathrm{P}(x)|}{2^{n-1}x^n}$ puis $\mathrm{M}(\mathrm{P}) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

d) Donner en fonction de T_n un polynôme unitaire de degré n tel que $\mathrm{M}(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.