Correspondance entre suites et séries (d'après Navale PC 1992)

Durée : libre

La première partie de ce problème établit quelques correspondances entre suites et séries numériques. La seconde partie applique certains de ces résultats pour étudier une suite définie par récurrence.

Partie I.

I.1 Convergence au sens de Cesàro

Question 1. Soit (α_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général α_n diverge. À toute suite réelle (u_n) on associe la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$$

a) Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, il en est de même de la suite (v_n).

b) Réciproquement, la convergence de la suite (v_n) entraîne-t-elle nécessairement celle de (u_n) ?

c) Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{1/n}$.

Question 2. À toute série réelle $\sum u_n$ on associe la suite des sommes partielles (S_n) définie par $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_k$$

On dit que la série $\sum u_n$ *converge au sens de Cesàro* lorsque la suite (σ_n) converge.

a) Justifier que si la série $\sum u_n$ converge (au sens usuel du terme), elle converge au sens de Cesàro.

b) Dans cette question uniquement, on suppose $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas (au sens usuel du terme) mais qu'elle converge au sens de Cesàro.

Question 3. On conserve les notations de la question précédente.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k u_k = (n+1)\mathrm{S}_n - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_k$.

b) On suppose que la série $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro, et que $\lim\limits_{+\infty} n u_n = 0$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge au sens usuel du terme.

I.2 Équivalence des sommes partielles

Question 4.

a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs strictement positives. On suppose que $u_n \sim v_n$ et que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.
Montrer que les deux suites des sommes partielles (S_n) et (S'_n) définies par $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sum_{k=0}^{n} v_k$ sont équivalentes : $\mathrm{S}_n \sim \mathrm{S}'_n$.

b) En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Question 5.

a) Montrer plus précisément que la suite (γ_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ tend vers une limite γ que l'on ne cherchera pas à calculer.

b) Préciser le sens de variation de (γ_n) et l'encadrer par deux entiers consécutifs.

Question 6. Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$$

où v_n est le terme général d'une série absolument convergente.

a) Montrer que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{\lambda}{n} + w_n$ où w_n est le terme général d'une série absolument convergente.

b) En déduire qu'il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\mathrm{A}}{n^\lambda}$.

c) En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n+2)}$.

Partie II.

Dans toute cette partie on considère la suite (u_n) définie par la dommée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

Question 7. Étudier la convergence de la suite (u_n) ; on discutera en fonction de la valeur de u_0.

Question 8. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge mais qu'elle n'est pas stationnaire, et on pose $v_n = -u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Quelle relation de récurrence vérifie la suite (v_n) ? Montrer que v_n est équivalent à v_{n+1}.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$. Montrer que la suite (a_n) converge, et en déduire un équivalent de (v_n).

c) Quelle est la nature des séries de termes généraux v_n, $\sin(v_n^2)$ et $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$?

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $b_n = a_n - 1$. Montrer que (b_n) tend vers 0 et en trouver un équivalent.

e) En déduire la nature de la série de terme général $t_n = v_n - \frac{1}{n}$.

Question 9.

a) Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) tend-elle vers $+\infty$?
Montrer qu'alors u_n^2 est équivalent à u_{n+1}.

b) Prouver que la suite (P_n) définie par $\mathrm{P}_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ a une limite λ qu'on ne cherchera pas à calculer.

On suppose jusqu'à la fin du problème que $u_0 > 0$.

Question 10. La limite λ est fonction de u_0 uniquement. Montrer que l'application $u_0 \mapsto \lambda$ est une fonction croissante, que $\lambda > 0$ pour tout $u_0 > 0$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda - \frac{\ln(u_n)}{2^n} < \frac{1}{2^n u_n}$.

Question11. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?

♦ ♦
♦