Corrigé : correspondance entre suites et séries (d'après Navale PC 1992)

Partie I.

I.1 Convergence au sens de Cesàro

Question 1.

a) Traduisons l'hypothèse : pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel $|v_k - \ell| \leqslant \epsilon$.

On a $v_n - \ell = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k} \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k(u_k - \ell)$ donc $|v_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k} \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k |u_k - \ell|$. Pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$ on a donc :

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \alpha_k |u_k - \ell| + \frac{\epsilon}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k} \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} \alpha_k \leqslant \frac{\mathrm{B}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k} + \epsilon \qquad \text{en posant } \mathrm{B} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \alpha_k |u_k - \ell|.$$

Puisque la série $\sum \alpha_n$ et positive et divergente, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{B}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k} = 0$ et il existe un rang N′ à partir duquel $\dfrac{\mathrm{B}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k} \leqslant \epsilon$.

Pour $n \geqslant \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}')$ on a alors $|v_n - \ell| \leqslant 2\epsilon$, ce qui traduit le fait que $\lim v_n = \ell$.

b) La réciproque de ce résultat peut être mise en défaut en posant $\alpha_n = 1$ et $u_n = (-1)^n$. Dans ce cas $\lim v_n = 0$ bien que (u_n) diverge.

c) Posons $a_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)\right)^{1/n}$. On a $\ln a_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$. Posons alors $\alpha_k = 1$ et $u_k = \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$. La question précédente s'applique et on a $v_n = \ln a_n$, donc $\lim \ln a_n = \lim u_n = 0$, et ainsi $\lim a_n = 1$.

Question 2.

a) Dire que la série $\sum u_n$ converge signifie que la suite (S_n) converge et en notant S sa somme on peut appliquer la première question, qui affirme que la suite (σ_n) converge vers S.

b) Considérons la suite $u_n = (-1)^n$. On a $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$ et $\sigma_n = \dfrac{1}{2(n+1)} \sum\limits_{k=0}^{n} (1 + (-1)^k) = \dfrac{1}{2(n+1)} \left(n + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}\right)$ donc $\lim \sigma_n = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, la série $\sum (-1)^n$ converge au sens de Cesàro alors qu'elle diverge au sens usuel.

Question 3.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k(\mathrm{S}_k - \mathrm{S}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} k \mathrm{S}_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \mathrm{S}_k = n \mathrm{S}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{S}_k = (n+1) \mathrm{S}_n - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_k$$

(c'est une transformation d'Abel).

d) Ainsi, $\mathrm{S}_n - \sigma_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} k u_k$. Aussi, si on suppose que $\lim n u_n = 0$ la première question permet d'en déduire que $\lim \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} k u_k = 0$. Si, de plus, on suppose que la suite (σ_n) converge, on peut en déduire que la suite (S_n) converge vers la même limite, autrement dit que la série $\sum u_n$ converge.

I.2 Équivalence des sommes partielles

Question 4.

a) Traduisons l'équivalence des suites (u_n) et (v_n) : $v_n - u_n = \mathrm{o}(u_n)$ donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel $|v_k - u_k| \leqslant \epsilon u_k$. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$ on a ainsi :

$$|\mathrm{S}'_n - \mathrm{S}_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |v_k - u_k| \leqslant \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} |v_k - u_k| + \epsilon \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} u_k \leqslant \mathrm{B} + \epsilon \mathrm{S}_n \qquad \text{avec } \mathrm{B} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} |v_k - u_k|.$$

On a $\lim \epsilon \mathrm{S}_n = +\infty$ donc il existe un rang N′ à partir duquel $\mathrm{B} \leqslant \epsilon \mathrm{S}_n$. Pour $n \geqslant \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}')$ on a alors $|\mathrm{S}'_n - \mathrm{S}_n| \leqslant 2\epsilon \mathrm{S}_n$, ce qui traduit le fait que $\mathrm{S}'_n - \mathrm{S}_n = \mathrm{o}(\mathrm{S}_n)$, soit encore $\mathrm{S}'_n \sim \mathrm{S}_n$.

b) $\ln(n+1) - \ln n = \ln\Bigl(1 + \dfrac{1}{n}\Bigr) \sim \dfrac{1}{n}$ donc en posant $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln n$ on peut appliquer la question précédente : $\mathrm{S}_n \sim \mathrm{S}'_n$. Mais $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et par télescopage $\mathrm{S}'_n = \ln(n+1)$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n+1) \sim \ln n$.

Question 5.

a) On calcule $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\Bigl(1 + \dfrac{1}{n}\Bigr)$.

On a $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \dfrac{1}{n}\Bigl(1 + \dfrac{1}{n}\Bigr)^{-1} - \ln\Bigl(1 + \dfrac{1}{n}\Bigr) = \dfrac{1}{n}\Bigl(1 - \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\Bigl(\dfrac{1}{n}\Bigr)\Bigr) - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\Bigl(\dfrac{1}{n^2}\Bigr) = -\dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\Bigl(\dfrac{1}{n^2}\Bigr)$. Ainsi, $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \mathrm{O}\Bigl(\dfrac{1}{n^2}\Bigr)$, ce qui prouve la convergence absolue de la série $\sum(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$. La convergence absolue entraîne la convergence simple, et par télescopage la suite (γ_n) converge.

b) On a $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim \dfrac{-1}{2n^2}$ donc, au moins à partir d'un certain rang, on a $\gamma_{n+1} \leqslant \gamma_n$.

Pour le démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et non plus à partir d'un certain rang, on écrit $\gamma_{n+1} - \gamma_n = f\Bigl(\dfrac{1}{n}\Bigr)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ et on étudie la fonction f.

On calcule $f'(x) = \dfrac{-x}{(1+x)^2}$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et sachant que $f(0) = 0$ on a bien : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant f(0) = 0$, et en particulier $\gamma_{n+1} - \gamma_n = f\Bigl(\dfrac{1}{n}\Bigr) \leqslant 0$: la suite (γ_n) est décroissante.

Sachant que $\gamma_1 = 1$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}*$, $\gamma_n \leqslant 1$.

Enfin, en étudiant la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$ on montre de même que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant g(0) = 0$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\Bigl(1 + \dfrac{1}{k}\Bigr) \leqslant \dfrac{1}{k}$. En particulier, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\Bigl(1 + \frac{1}{k}\Bigr) = \sum_{k=1}^{n} \bigl(\ln(k+1) - \ln k\bigr) = \ln(n+1)$ donc $\gamma_n \geqslant \ln(n+1) - \ln n \geqslant 0$.

On a donc : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \gamma_n \leqslant 1$.

Question 6.

a) Posons $w_n = \ln\Bigl(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Bigr) + \dfrac{\lambda}{n}$; il s'agit de prouver que la série $\sum |w_n|$ converge.

On a $w_n = \ln\Bigl(1 - \dfrac{\lambda}{n} + v_n\Bigr) + \dfrac{\lambda}{n}$. On sait qu'au voisinage de 0, $\ln(1-x) + x = \mathrm{O}(x^2)$, ce qui se traduit par l'existence de $\mathrm{K} > 0$ tel que pour x assez petit, $\bigl|\ln(1+x) + x\bigr| \leqslant \mathrm{K}x^2$.

La série $\sum v_n$ converge donc $\lim v_n = 0$. Ainsi, à partir d'un certain rang on a : $|w_n - v_n| \leqslant \mathrm{K}\Bigl(\dfrac{\lambda}{n} - v_n\Bigr)^2 = \dfrac{\mathrm{K}\lambda^2}{n^2} - \dfrac{2\mathrm{K}\lambda v_n}{n} + \mathrm{K}v_n^2$.

La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, les séries $\sum \dfrac{v_n}{n}$ et $\sum v_n^2$ convergent absolument car $\dfrac{v_n}{n} = \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n^2 + \mathrm{o}(v_n)$, on en déduit que la série $\sum |w_n - v_n|$ converge. Mais $|w_n| \leqslant |v_n| + |w_n - v_n|$ donc la série $\sum w_n$ converge absolument.

b) Il s'agit maintenant de démontrer que la suite $n^\lambda u_n$ converge. Pour cela on calcule :

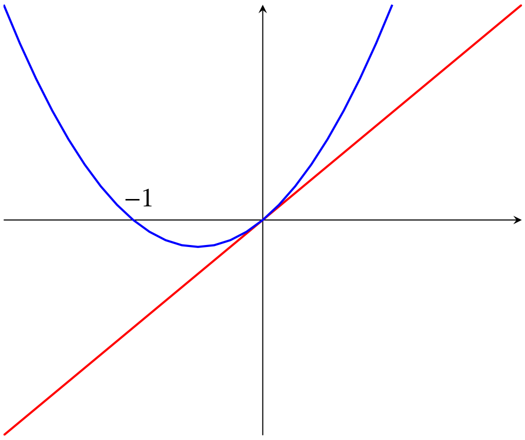
$$\ln\bigl((n+1)^\lambda u_{n+1}\bigr) - \ln(n^\lambda u_n) = \ln\Bigl(\Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr)^\lambda \frac{u_{n+1}}{u_n}\Bigr) = \ln\Bigl(\frac{u_{n+1}}{u_n}\Bigr) + \frac{\lambda}{n} + \mathrm{O}\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr) = w_n + \mathrm{O}\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr)$$

La question précédente permet d'affirmer que la série de terme général $\ln\bigl((n+1)^\lambda u_{n+1}\bigr) - \ln(n^\lambda u_n)$ converge absolument, donc converge, puis par télescopage que la suite $\ln(n^\lambda u_n)$ converge. En notant ℓ sa limite et en posant $\mathrm{A} = \mathrm{e}^\ell > 0$ on a bien $u_n \sim \dfrac{\mathrm{A}}{n^\lambda}$.

c) On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+4} = 1 - \dfrac{3}{2n+4} = 1 - \dfrac{3}{2n} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc la question précédente s'applique avec $\lambda = \dfrac{3}{2}$ et $v_n = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ et montre qu'il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{\mathrm{A}}{n^{3/2}}$. Sachant que $\dfrac{3}{2} > 1$ on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

Partie II.

Question 7. Traçons le graphe des fonctions $x \mapsto x + x^2$ et $x \mapsto x$:



Une fois ceci fait il est facile de prouver (je ne détaille pas) :

- si $u_0 > 0$ la suite (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$;
- si $-1 \leqslant u_0 \leqslant 0$ la suite est croissante et converge vers 0 ;
- si $u_0 < -1$ on a $u_1 > 0$ et la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Question 8.

a) L'hypothèse de non stationnarité revient à supposer $-1 < u_0 < 1$, et dans ce cas la suite (u_n) est strictement croissante et converge vers 0. La suite (v_n) est donc à valeurs dans $]0,1[$, strictement décroissante et converge vers 0. Elle vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n - v_n^2$.
Puisque (v_n) tend vers 0 on a $v_n^2 = \mathrm{o}(v_n)$ et ainsi $v_{n+1} = v_n + \mathrm{o}(v_n)$, soit $v_{n+1} \sim v_n$.

b) On calcule $\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{v_n - v_n^2} - \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{1 - v_n}$ donc $\lim a_n = 1$.

Les séries $\sum a_n$ et $\sum 1$ sont à termes généraux positifs et sont divergentes donc on peut appliquer la question 4a : leurs sommes partielles respectives sont équivalentes, ce qui donne $\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_0} \sim \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$, et donc $v_n \sim \dfrac{1}{n}$.

c) On a $v_n \sim \dfrac{1}{n}$ donc la série $\sum v_n$ diverge.

On a $\sin(v_n^2) \sim v_n^2 \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc la série $\sum \sin(v_n^2)$ converge.

On a $\dfrac{v_n}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$ donc la série $\sum \dfrac{v_n}{\sqrt{n}}$ converge.

d) $\lim a_n = 1$ donc (b_n) converge vers 0. De plus, $b_n = \dfrac{1}{1 - v_n} - 1 = \dfrac{v_n}{1 - v_n}$ donc $b_n \sim \dfrac{1}{n}$.

e) On a $a_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc on peut de nouveau appliquer la question 4a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - 1) \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\Big) - n \sim \ln n$. Par télescopage on obtient $\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_1} = n + \ln n + \mathrm{o}(\ln n)$, puis en simplifiant $\dfrac{1}{v_n} = n + \ln n + \mathrm{o}(\ln n)$.

On passe ensuite à l'inverse : $v_n = \dfrac{1}{n + \ln n + \mathrm{o}(\ln n)} = \dfrac{1}{n}\Big(1 + \dfrac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{\ln n}{n}\Big)\Big)^{-1} = \dfrac{1}{n}\Big(1 - \dfrac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{\ln n}{n}\Big)\Big)$ donc $t_n = v_n - \dfrac{1}{n} \sim -\dfrac{\ln n}{n^2}$.

On a $t_n = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$ donc la série $\sum t_n$ converge absolument, donc converge.

Question 9.

a) On a vu que lorsque $u_0 < -1$ ou $u_0 > 0$ la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Dans ce cas, $u_n = \mathrm{o}(u_n^2)$ donc $u_{n+1} \sim u_n^2$.

b) On a $\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\Big(\ln(u_{n+1}) - 2\ln(u_n)\Big) = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\Big(\dfrac{u_{n+1}}{u_n^2}\Big)$. Or $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n^2} = 1$ donc $\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{2^{n+1}}\Big)$.

La série $\sum \dfrac{1}{2^n}$ converge donc la série $\sum \Big(\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n\Big)$ converge (absolument). Par télescopage on en déduit que la suite (P_n) converge ; on note λ sa limite.

Question 10. Considérons deux suites définies par $0 < u_0 < u_0'$ et les relations $u_{n+1} = u_n + u_{n+1}^2$, $u_{n+1}' = u_n' + (u_{n+1}')^2$. Il est facile de prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_n'$, et donc que $\mathrm{P}_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n} \leqslant \dfrac{\ln(u_n')}{2^n} = \mathrm{P}_n'$. En passant à la limite on obtient que $\lambda = \lim \mathrm{P}_n \leqslant \lim \mathrm{P}_n' = \lambda'$, ce qui montre que l'application $u_0 \mapsto \lambda$ est croissante.

Si on reprend le calcul fait, on a aussi $\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\Big(1 + \dfrac{1}{u_n}\Big) > 0$ donc la suite (P_n) est croissante. De plus $\lim u_n = +\infty$ donc il existe un rang N à partir duquel $u_n > 1$ et ainsi $\mathrm{P}_n \geqslant \mathrm{P}_\mathrm{N} > 0$. On en déduit par passage à la limite que $\lambda \geqslant \mathrm{P}_\mathrm{N} > 0$.

Enfin, toujours par télescopage, $\lambda - \dfrac{\ln(u_n)}{2^n} = \lambda - \mathrm{P}_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(\mathrm{P}_{k+1} - \mathrm{P}_k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\ln\Big(1 + \frac{1}{u_k}\Big) \leqslant \ln\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}$ (car la suite (u_n) est croissante) et en calculant la somme géométrique on obtient $\lambda - \dfrac{\ln(u_n)}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}\ln\Big(1 + \dfrac{1}{u_n}\Big)$.

Il reste à appliquer la majoration usuelle $\forall x > 0, \ln(1+x) < x$ pour obtenir $\lambda - \dfrac{\ln(u_n)}{2^n} < \dfrac{1}{2^n u_n}$.

Question 11. On a $u_n = \mathrm{e}^{2^n \mathrm{P}_n}$. La suite (P_n) converge vers $\lambda > 0$ donc il existe un rang N à partir duquel $\mathrm{P}_n \geqslant \dfrac{\lambda}{2}$.On a alors $u_n \geqslant \mathrm{e}^{2^{n-1}\lambda}$ soit $0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant (\mathrm{e}^{-\lambda})^{2^{n-1}}$. Mais $0 < \mathrm{e}^{-\lambda} < 1$ donc $\dfrac{1}{u_n} = \mathrm{o}\Big((\mathrm{e}^{-\lambda})^n\Big)$ et par comparaison à une série géométrique convergente, la série positive $\sum \dfrac{1}{u_n}$ converge.

♦ ♦
♦