# Corrigé : chaîne de Markov en temps continu (Mines PC 2023)

## Préliminaires

**1** ▷ Pour tout $i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, $(\mathrm{AU})[i] = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}[i,j]$ donc A vérifie $(\mathrm{M}_2)$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, $(\mathrm{AU})[i] = 1 = \mathrm{U}[i]$, soit encore si et seulement si $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$.
Soient A et B deux noyaux de Markov. Pour tout $(i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2$, $(\mathrm{AB})[i,j] = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}[i,k]\mathrm{B}[k,j] \geqslant 0$ donc AB vérifie $(\mathrm{M}_1)$.
En outre, $\mathrm{ABU} = \mathrm{AU} = \mathrm{U}$ donc AB vérifie $(\mathrm{M}_2)$. La matrice AB est bien un noyau de Markov.

**2** ▷ Montrons par récurrence sur $n$ que $\mathrm{K}^n$ est un noyau de Markov :

- si $n = 0$, $\mathrm{K}^0 = \mathrm{I}_\mathrm{N}$ est bien un noyau de Markov ;
- si $n \geqslant 1$, supposons que $\mathrm{K}^{n-1}$ soit un noyau de Markov. D'après la question précédente il en est de même de $\mathrm{K}^n = \mathrm{K}^{n-1} \times \mathrm{K}$ donc la récurrence se propage.

**3** ▷ Les conditions $(\mathrm{M}_1)$ et $\mathrm{M}_2$ imposent que pour tout $(i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2$, $0 \leqslant \mathrm{K}[i,j] \leqslant 1$, et puisque $\mathrm{K}^n$ est aussi un noyau de Markov, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mathrm{K}^n[i,j] \leqslant 1$. Ainsi, $\dfrac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!} = \mathrm{O}\Big(\dfrac{|t|^n}{n!}\Big)$ et puisque la série $\sum \dfrac{|t|^n}{n!}$ converge (c'est le développement en série entière de $\mathrm{e}^{|t|}$), la série $\sum \dfrac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$ converge.

**4** ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leqslant \mathrm{K}^n[i,j] \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \mathrm{H}_t[i,j] \leqslant 1$ ; la condition $(\mathrm{M}_1)$ est satisfaite.
De plus, pour tout $i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}^n[i,j] = 1$ donc $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}_t[i,j] = \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}^n[i,j] = \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!} = 1$ (somme finie de séries convergentes). La condition $(\mathrm{M}_2)$ est satisfaite, la matrice $\mathrm{H}_t$ est un noyau de Markov.

**5** ▷ Pour tout $(i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2$, $(\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s)[i,j] = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}_t[i,k]\mathrm{H}_s[k,j] = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{-(t+s)} \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{t^p \mathrm{K}^p[i,k]}{p!}\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} \dfrac{s^q \mathrm{K}^q[k,j]}{q!}\Big)$.
Les deux séries convergent absolument pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ donc on peut en réaliser le produit de Cauchy :

$$(\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s)[i,j] = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p=0}^{n} \frac{\mathrm{K}^p[i,k]\mathrm{K}^{n-p}[k,j] t^p s^{n-p}}{p!(n-p)!}\Big)$$

S'agissant d'une somme finie de séries convergentes, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s)[i,j] &= \mathrm{e}^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p=0}^{n} \frac{t^p s^{n-p}}{p!(n-p)!} \underbrace{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}^p[i,k]\mathrm{K}^{n-p}[k,j]}_{(\mathrm{K}^p \times \mathrm{K}^{n-p})[i,j]}\Big) = \mathrm{e}^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} t^p s^{n-p}\Big) \mathrm{K}^n[i,j] \\ &= \mathrm{e}^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} \mathrm{K}^n[i,j] = \mathrm{H}_{t+s}[i,j]\end{aligned}$$

donc $\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s = \mathrm{H}_{t+s}$.

## Partie 1 – Modélisation probabiliste

**6** ▷ Pour tout $(i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, $p_{ij} \geqslant 0$ donc la condition $(\mathrm{M}_1)$ est bien vérifiée.
$\big(\mathrm{Z}_2 = j \mid j \in [\![1,\mathrm{N}]\!]\big)$ est un système complet d'événements donc pour tout $i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}\big(\mathrm{Z}_2 = j \mid \mathrm{Z}_1 = i\big) = 1$, soit $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} p_{ij} = 1$. la condition $(\mathrm{M}_2)$ est vérifiée, K est bien un noyau de Markov.

**7** ▷ Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $j \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = j) = \mathrm{K}^n[1, j]$ :

- c'est vrai pour $n = 0$ puisque $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_0 = j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathrm{I}_\mathrm{N}[1, j]$ ;
- si $n \geqslant 0$, supposons le résultat acquis au rang $n$.

  D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}\big(\mathrm{Z}_{n+1} = j \mid \mathrm{Z}_n = i\big)\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = i) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} p_{ij}\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = i)$.

  On a $p_{ij} = \mathrm{K}[i, j]$ et par hypothèse de récurrence, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = i) = \mathrm{K}^n[1, i]$ donc

  $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}^n[1, i]\mathrm{K}[i, j] = (\mathrm{K}^n \times \mathrm{K})[1, j] = \mathrm{K}^{n+1}[1, j]$ ; la récurrence se propage.

**8** ▷ $\big(\mathrm{Y}_t = n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big)$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_{t,j}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = j)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_t = n) = \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \mathrm{K}^n[1, j]}{n!} = \mathrm{H}_t(1, j)$$

## Partie 2 – Étude d'un endomorphisme auto-adjoint

**9** ▷ $u$ est autoadjoint donc d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e)$ formée de vecteurs propres de $u$.
Posons $u(e_k) = \lambda_k e_k$. On a $q_u(e_k) = \langle u(e_k) \mid e_k\rangle = \lambda_k \|e_k\|^2$ donc $\lambda_k \geqslant 0$. On a prouvé que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

**10** ▷ Avec les mêmes notations, et sans perte de généralité, supposons $\lambda_1 = 0$, et posons $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. On a alors $p(x) = x_1 e_1$ donc $q_u\big(x - p(x)\big) = \Big\langle \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k e_k \,\Big|\, \sum_{k=2}^{n} x_k e_k \Big\rangle = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k^2 \geqslant \lambda_2 \sum_{k=2}^{n} x_k^2 = \lambda_2 \big\|x - p(x)\big\|^2$.

## Partie 3 – Convergence de $\mathrm{H}_t[i, j]$

**11** ▷ Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(\pi\mathrm{K})[i] = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \pi[j]\mathrm{K}[j, i] = \Big(\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[i, j]\Big)\pi[i] = \pi[i]$ d'après la propriété $(\mathrm{M}_2)$ donc $\pi\mathrm{K} = \pi$.

**12** ▷ Bilinéarité et symétrie sont ici des propriétés évidentes.
Pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbb{R})$, $\langle \mathrm{X} \mid \mathrm{X}\rangle = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]^2\pi[i] \geqslant 0$ car $\pi[i] \geqslant 0$ ($\pi$ est une probabilité), avec égalité si et seulement si pour tout $i \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$, $\mathrm{X}[i]^2\pi[i] = 0$, soit $\mathrm{X}[i] = 0$ car $\pi[i] > 0$. L'application $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \langle \mathrm{X} \mid \mathrm{Y}\rangle$ est défini positif, il s'agit bien d'un produit scalaire.

**13** ▷ D'après la question 1, $\mathrm{KU} = \mathrm{U}$ et par hypothèse 1 est valeur propre simple de K donc $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{K} - \mathrm{I}) = 1$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(\mathrm{K} - \mathrm{I}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$. Or $u(\mathrm{X}) = 0 \iff \mathrm{KX} = \mathrm{X}$ donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$.

Pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle u(\mathrm{X}) \mid \mathrm{Y}\rangle &= \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{X} - \mathrm{KX})[i]\mathrm{Y}[i]\pi[i] = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]\mathrm{Y}[i]\pi[i] - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[i, j]\mathrm{X}[j]\mathrm{Y}[i]\pi[i] \\ &= \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]\mathrm{Y}[i]\pi[i] - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[j, i]\mathrm{X}[j]\mathrm{Y}[i]\pi[j] \\ &= \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]\mathrm{Y}[i]\pi[i] - \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j]\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[j, i]\mathrm{Y}[i]\Big)\pi[j] \\ &= \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]\mathrm{Y}[i]\pi[i] - \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j](\mathrm{KY})[j]\pi[j] = \langle \mathrm{X} \mid \mathrm{Y} - \mathrm{KY}\rangle = \langle \mathrm{X} \mid u(\mathrm{Y})\rangle\end{aligned}$$

donc $u$ est autoadjoint.

**14** ▷ $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(X[i]-X[j])^2K[i,j]\pi[i]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]^2K[i,j]\pi[i]+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[j]^2K[i,j]\pi[i]-2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]X[j]K[i,j]\pi[i].$

Or :
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]^2K[i,j]\pi[i]=\sum_{i=1}^{N}X[i]^2\Big(\sum_{j=1}^{N}K[i,j]\Big)\pi[i]=\sum_{i=1}^{N}X[i]^2\pi[i]=\|X\|^2$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[j]^2K[i,j]\pi[i]=\sum_{j=1}^{N}X[j]^2\sum_{i=1}^{N}K[j,i]\pi[j]=\sum_{j=1}^{N}X[j]^2\pi[j]=\|X\|^2$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]X[j]K[i,j]\pi[i]=\sum_{i=1}^{N}X[i]\Big(\sum_{j=1}^{N}X[j]K[i,j]\Big)\pi[i]=\sum_{i=1}^{N}X[i](KX)[i]\pi[i]=\langle X\mid KX\rangle$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(X[i]-X[j])^2K[i,j]\pi[i]=2\|X\|^2-\langle X\mid KX\rangle=q_u(X).$

On en déduit que pour tout $X\in\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, $q_u(X)\geqslant 0$, et donc que $\mathrm{Sp}(u)\subset\mathbb{R}_+$ (question 9).

**15** ▷ Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\displaystyle(H_tX)[i]=\sum_{j=1}^{N}H_t[i,j]X[j]=e^{-t}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[i,j]X[j]}{n!}.$

Une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence (ici égal à $\mathbb{R}$) donc $t\mapsto(H_tX)[i]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour tout $i\in[\![1,N]\!]$, ce qui prouve que $\psi_X$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En outre,

$$\frac{d}{dt}(H_tX)[i]=-e^{-t}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[i,j]X[j]}{n!}+e^{-t}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^{n+1}[i,j]X[j]}{n!}$$

On a $\displaystyle(KH_t)[i,j]=\sum_{k=1}^{N}K[i,k]e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[k,j]}{n!}=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=1}^{N}K[i,k]K^n[k,j]=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^{n+1}[i,j]}{n!}$ donc

$$\frac{d}{dt}(H_tX)[i]=-(H_tX)[i]+(KH_tX)[i]\qquad\text{et}\qquad\psi_X'(t)=-H_tX+KH_tX=-(I_n-K)H_tX$$

**16** ▷ On a $\varphi_X(t)=\langle\psi_X(t)\mid\psi_X(t)\rangle$ donc $\varphi_X$ est dérivable (composée d'une fonction dérivable et d'une forme bilinéaire) et $\varphi_X'(t)=2\langle\psi_X(t)\mid\psi_X'(t)\rangle=-2\langle H_tX\mid(I_n-K)H_tX\rangle=-2q_u(H_tX)$.

**17** ▷ On a $\mathrm{Ker}\,u=\mathrm{Vect}(U)$ et $\displaystyle\|U\|^2=\sum_{i=1}^{n}\pi[i]=1$ ($\pi$ est une probabilité) donc $p(X)=\langle U\mid X\rangle U$.

Or $\displaystyle\langle U\mid H_tX\rangle=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}H_t[i,j]X[j]\pi[i]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}H_t[j,i]X[j]\pi[j]$ (car $H_t$ est $\pi$-réversible) $\displaystyle=\sum_{j=1}^{N}X[j]\pi[j]=\langle U\mid X\rangle$ donc $p(H_tX)=p(X)$.

**18** ▷ On a $Y=X-p(X)=X-\langle U\mid X\rangle U$ donc $H_tY=H_tX-p(X)$ (puisque $H_tU=U$) et donc $H_tY=H_tX-p(H_tX)$.
D'après la question 10, $q_u(H_tY)\geqslant\lambda\|H_tY\|^2$, et d'après la question 16, $\varphi_Y'(t)\leqslant-2\lambda\varphi_Y(t)$.
On a donc pour tout $t\geqslant 0$, $\big(\varphi_Y'(t)+2\lambda\varphi_Y(t)\big)e^{2\lambda t}\leqslant 0$, soit encore $\dfrac{d}{dt}\Big(\varphi_Y(t)e^{2\lambda t}\Big)\leqslant 0$. Ceci montre que la fonction $t\mapsto\varphi_Y(t)e^{2\lambda t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $\varphi_Y(t)e^{2\lambda t}\leqslant\varphi_Y(0)=\|Y\|^2$, soit encore $\varphi_Y(t)\leqslant e^{-2\lambda t}\|X-p(X)\|^2$.
Or on a vu que $\varphi_Y(t)=\|H_tY\|^2=\|H_tX-p(X)\|^2$, donc $\|H_tX-p(X)\|^2\leqslant e^{-2\lambda t}\|X-p(X)\|^2$.

**19** ▷ On a $p(E_i)=\langle U\mid E_i\rangle U=\pi[i]U$ et $\|E_i-p(E_i)\|^2=\|E_i\|^2-2\langle E_i\mid p(E_i)\rangle+\|p(E_i\|^2$.
On a $\|E_i\|^2=\pi[i]$, $\|p(E_i)\|^2=\pi[i]^2\|U\|^2=\pi[i]^2$ car $\pi$ est une probabilité. Enfin, $\langle E_i\mid p(E_i)\rangle=\pi[i]\langle E_i\mid U\rangle=\pi[i]^2$ donc $\|E_i-p(E_i)\|^2=\pi[i]-\pi[i]^2\leqslant\pi[i]$.
En appliquant la question précédente à $E_i$ on obtient alors $\|H_tE_i-\pi[i]U\|\leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]}$.

**20** ▷ D'après la question 5, $H_t=H_{t/2}\times H_{t/2}$ donc $\displaystyle H_t[i,j]=\sum_{k=1}^{N}H_{t/2}[i,k]H_{t/2}[k,j]$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(H_{t/2}[i,k]-\pi[k]\Big)\Big(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]\Big)=H_t[i,j]-\sum_{k=1}^{N}H_{t/2}[i,k]\pi[j]-\sum_{k=1}^{N}\pi[k]H_{t/2}[k,j]+\pi[j]$$

D'après la propriété $(M_2)$, $\sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k]\pi[j] = \pi[j]$ et par π-réversibilité, $\sum_{k=1}^{N} \pi[k]H_{t/2}[k,j] = \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[j,k]\pi[j] = \pi[j]$ donc en définitive, $\sum_{k=1}^{N}\Big(H_{t/2}[i,k]-\pi[k]\Big)\Big(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]\Big) = H_t[i,j]-\pi[j]$.

**21** ▷ Par π-réversibilité on a $\Big(H_{t/2}[k,i]-\pi[k]\Big)\pi[i] = \Big((H_{t/2}[i,k]-\pi[i]\Big)\pi[k]$ donc :

$$\pi[i]\Big(H_t[i,j]-\pi[j]\Big) = \sum_{k=1}^{N}\Big(H_{t/2}[k,i]-\pi[i]\Big)\Big(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]\Big)\pi[k]$$

Par ailleurs, $\Big(H_tE_i-\pi[i]U\Big)[k] = H_t[k,i]-\pi[i]$ donc $\pi[i]\Big(H_t[i,j]-\pi[j]\Big) = \Big\langle H_{t/2}E_i-\pi[i]U \;\Big|\; H_{t/2}E_j-\pi[j]U\Big\rangle$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\pi[i]\Big|H_t[i,j]-\pi[j]\Big| \leqslant \|H_{t/2}E_i-\pi[i]U\|\times\|H_{t/2}E_j-\pi[j]U\|$ et d'après la question 19, $\pi[i]\Big|H_t[i,j]-\pi[j]\Big| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]\pi[j]}$, soit $\Big|H_t[i,j]-\pi[j]\Big| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\dfrac{\pi[j]}{\pi[i]}}$.
On en déduit bien évidemment que $\lim\limits_{t\to+\infty} H_t[i,j] = \pi[j]$.