Le problème des moments (Mines PSI 2019)

Durée : 4 heures (initialement 3 heures)

Dans tout le problème I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, qui pourra être $[0,1]$ ou $[0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire

$$\int_{\mathrm{I}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité est fini si

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur I,}$$

et on définit alors le moment d'ordre n par le réel

$$m_n(f) = \int_{\mathrm{I}} x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

On admet qu'il s'agit d'une densité.

I Quelques exemples

1. On considère $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0,+\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.
3. Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?
4. Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$. *On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.*
5. Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : une densité est-elle déterminée par l'ensemble de ses moments ? Autrement dit, est-il vrai que

si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et $m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = g$ sur I ?

On va notamment voir que c'est vrai si $\mathrm{I} = [0,1]$ (partie III), mais faux si $\mathrm{I} = [0,+\infty[$ (partie V) ou $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

II Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

6. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

7. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

8. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

9. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \mathrm{C}n,$$

pour une constante $\mathrm{C} > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,

$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale

$$\mathrm{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en

$$\mathrm{X} = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}.$$

10. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathrm{B}_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in \mathrm{Y}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

11. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que $\|\mathrm{B}_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$.

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

III Le problème des moments sur $[0,1]$

On considère ici deux densités f et g sur $\mathrm{I} = [0,1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n(f) = m_n(g)$.

12. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

On sait par la partie II qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f - g$ sur $[0,1]$.

13. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x))\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x$.

14. Montrer alors que $f = g$ sur $[0,1]$.

IV Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

où φ est définie en (1).

15. Justifier que $\widehat{\varphi}$ est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.

16. Justifier que $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi}\, t\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

17. Montrer que $\widehat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

18. Montrer que $\widehat{\varphi}(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

V Le problème des moments sur $[0, +\infty[$

Dans cette partie on considère $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

19. Montrer que f est bien une densité sur $[0, +\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln(x))\, \mathrm{d}x$.

20. Montrer que

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i(2\pi - in)u}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\, \mathrm{d}u \right),$$

où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z.

21. À l'aide de la partie IV, en déduire que $\mathrm{I}_n = 0$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_\alpha(x) = f(x)\big(1 + \alpha \sin(2\pi \ln x)\big)$.

22. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f et g_α sont deux densités sur $[0, +\infty[$, distinctes et telles que $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

♦ ♦

♦