Corrigé : le problème des moments (Mines PSI 2019)

I Quelques exemples

1. g est positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{+\infty} = 1$ donc g est une densité sur $[0,+\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n\,\mathrm{e}^{-x} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-x/2})$ (croissances comparées) donc $x \mapsto x^n\,\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que g possède un moment fini à tout ordre. Enfin, une intégration par parties donne

$$m_{n+1}(g) = \Big[-x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (n+1)m_n(g),$$

relation qui permet de prouver par récurrence que $m_n(g) = n!$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-|x|/2})$ (par croissances comparées) donc $x \mapsto x^n\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que tous les moments de φ sont finis.

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto x^{2p+1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est intégrable et impaire donc $m_{2p+1}(\varphi) = 0$.

4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, effectuons une intégration par parties :

$$m_{2p+2}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+1}(x\,\mathrm{e}^{-x^2/2})\,\mathrm{d}x = \Big[-x^{2p+1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + (2p+1)\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = (2p+1)m_{2p}(\varphi)$$

donc $m_{2p}(\varphi) = (2p-1)(2p-3)\cdots(3)(1)m_0(\varphi) = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}m_0(\varphi)$. Et puisque φ est supposée être une densité, $m_0(\varphi) = 1$ et ainsi $m_{2p}(\varphi) = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.

5. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Il s'agit d'une fonction positive intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{\pi}\arctan(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 1$ donc f est une densité. Cependant, la fonction $x \mapsto xf(x)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ car $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi x}$ donc f ne possède pas un moment d'ordre 1 fini.

II Théorème de Stone-Weierstrass

6. D'après la formule du binôme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \big(x+(1-x)\big)^n = 1$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} = nx\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j} = nx\big(x+(1-x)\big)^{n-1} = nx$$

(formule qui reste vraie pour $n = 0$).

8. Pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $k(k-1)\dbinom{n}{k} = n(n-1)\dbinom{n-2}{k-2}$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^j(1-x)^{n-2-j}\\ &= n(n-1)x^2\big(x+(1-x)\big)^{n-2} = n(n-1)x^2\end{aligned}$$

(formule qui reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$).

On en déduit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx.$

9. On développe le carré :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - 2nx\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &= nx + n(n-1)x^2 - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx(1-x) \leqslant \frac{n}{4}\end{aligned}$$

car une étude de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ montre qu'elle est maximale sur $[0,1]$ pour $x = 1/2$.

10. D'après la question 6, $\displaystyle\left|\mathrm{B}_n(x) - f(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\big(f(k/n) - f(x)\big)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(k/n) - f(x)\right|.$

On sépare ensuite la somme en distinguant les indices qui appartiennent à X de ceux qui appartiennent à Y :

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{B}_n(x) - f(x)\right| &\leqslant \sum_{k\in\mathrm{X}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(k/n) - f(x)\right| + \sum_{k\in\mathrm{Y}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(k/n) - f(x)\right|\\ &\leqslant \epsilon\sum_{k\in\mathrm{X}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + 2\|f\|_\infty\sum_{k\in\mathrm{Y}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leqslant \epsilon\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + 2\|f\|_\infty\sum_{k\in\mathrm{Y}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \epsilon + 2\|f\|_\infty\sum_{k\in\mathrm{Y}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

11. Pour tout $k \in \mathrm{Y}$ on a $\alpha^2n^2 \leqslant (k-nx)^2$ donc

$$\sum_{k\in\mathrm{Y}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k\in\mathrm{Y}}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4\alpha^2n}$$

d'après la question 9.

Lorsque n tend vers $+\infty$ il existe un rang N à partir duquel $\dfrac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2n} \leqslant \epsilon$ et alors, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, pour tout $x \in [0,1]$, $\left|\mathrm{B}_n(x) - f(x)\right| \leqslant 2\epsilon$. Autrement dit, $\|\mathrm{B}_n - f\|_\infty \leqslant 2\epsilon$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$.

III Le problème des moments sur $[0,1]$

12. Posons $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\mathrm{X}^k$. Alors $\displaystyle\int_0^1\big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k\int_0^1\big(f(x) - g(x)\big)x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\big(m_k(f) - m_k(g)\big) = 0.$

13. On a :

$$\left|\int_0^1\big(f(x)-g(x)\big)\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1\big(f(x)-g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1\left|f(x)-g(x)\right|\cdot\left|f(x)-g(x)-\mathrm{P}_n(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant \|f-g-\mathrm{P}_n\|_\infty\int_0^1\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$$

Sachant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f-g-\mathrm{P}_n\|_\infty = 0$ on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\big(f(x)-g(x)\big)\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1\big(f(x)-g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$

14. Les questions 12 et 13 permettent d'en déduire que $\displaystyle\int_0^1\big(f(x)-g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 0$. Mais $(f-g)^2$ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, il s'agit donc de la fonction nulle, et $f = g$.

IV Transformée de Fourier de la densité gaussienne

15. Notons $f(\xi,t) = \mathrm{e}^{it\xi}\varphi(t)$ et appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre :
   - pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(\xi,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;
   - pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto f(\xi,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
   - pour tout $(t,\xi) \in \mathbb{R}^2$, $\left|f(\xi,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\widehat{\varphi}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

16. Poursuivons en appliquant maintenant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

- pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto f(\xi, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t) = it\,\mathrm{e}^{it\xi}\,\varphi(t)$;
- pour tout $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t)\right| \leqslant t\varphi(t)$.

La fonction $t \mapsto t\varphi(t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car φ possède un moment d'ordre 1) donc $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\widehat{\varphi}'(x) = \int_{\mathbb{R}} it\,\mathrm{e}^{it\xi}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi}(t\,\mathrm{e}^{-t^2/2})\,\mathrm{d}t$$

17. On procède à une intégration par parties :

$$\widehat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\Big[-\mathrm{e}^{it\xi}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = -\xi\widehat{\varphi}(\xi)$$

18. On en déduit l'existence d'une constante C telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\varphi}(\xi) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.
Puisque φ est une densité, $\widehat{\varphi}(0) = 1$ donc $\mathrm{C} = 1$ et $\widehat{\varphi}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

V Le problème des moments sur $[0, +\infty[$

19. Notons déjà que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-(\ln x)^2/2 + \ln x}$ pour $x > 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$: f est bien continue en 0 et donc sur $[0, +\infty[$.
Le changement de variable bijectif $y = \ln x$ montre que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$ sont de même nature, et sont égale en cas de convergence. Or on a admis que φ est une densité donc f (qui est positive) est bien intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$; c'est une densité sur $[0, +\infty[$.

20. $\displaystyle\mathrm{Im}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i(2\pi - in)u}\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u)\mathrm{e}^{nu}\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \sin(2\pi \ln x)x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-(\ln x)^2/2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_n$ (à l'aide du changement de variable bijectif $x = \mathrm{e}^u$).

21. On observe que $\mathrm{I}_n = \mathrm{Im}\big(\widehat{\varphi}(2\pi - in)\big)$ donc d'après la question 18,

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{Im}\Big(\mathrm{e}^{-(2\pi - in)^2/2}\Big) = \mathrm{Im}\Big(\mathrm{e}^{-2\pi^2 + n^2/2 + 2i\pi n}\Big) = \mathrm{e}^{-2\pi^2 + n^2/2}\sin(2\pi n) = 0.$$

22. Cherchons à quelle condition g_α est une densité. Il s'agit d'une fonction continue, et d'après les questions 19 et 21 (pour $n = 0$) on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Ainsi, pour qu'il s'agisse d'une densité il faut et il suffit qu'elle soit à valeurs positives. Et sachant que $x \mapsto \sin(2\pi \ln x)$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, on peut affirmer que g_α est une densité si et seulement si $|\alpha| \leqslant 1$.
On suppose désormais $|\alpha| \leqslant 1$.
La question 20, mais cette fois pour tout $n \in \mathbb{N}$, montre que $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$. Ainsi, f et g_α sont deux densités ayant mêmes moments sans être égales, et ce pour tout $\alpha \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.