Matrices quasi-nilpotentes (Mines PSI 2016)

Durée : libre

Notations et objectifs

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant exactement un coefficient non nul, situé en position (i, j) et de valeur 1.
La transposée d'une matrice M sera notée M^{T}.
Une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *triangulaire supérieure stricte* lorsqu'elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls.
On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitués respectivement des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures strictes.

On rappelle la notation du symbole de Kronecker : pour x et y deux entiers, $\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Définition. — *Étant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et un élément j de $[\![1, n]\!]$, on note $\mathrm{C}_j(\mathrm{V})$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j-ième.*

Pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$, on notera $\mathrm{K}(\mathrm{M}) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $\mathrm{R}(\mathrm{M}) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$, $\mathrm{L}(\mathrm{M}) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $a(\mathrm{M}) \in \mathbb{K}$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{K}(\mathrm{M}) & \mathrm{R}(\mathrm{M}) \\ \hline \mathrm{L}(\mathrm{M}) & a(\mathrm{M}) \end{array}\right) \tag{1}$$

Définition. — *Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est* quasi-nilpotente *lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbb{K}$. Une partie V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* quasi-nilpotente *lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.*

On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énonce comme suit :

Théorème (dimension des espaces quasi-nilpotents) — *Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a*

$$\dim(\mathrm{V}) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}. \tag{QN}$$

La clef pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie C.

Lemme (lemme des colonnes) — *Pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, quasi-nilpotent, il existe un élément j de $[\![1, n]\!]$ tel que $\mathrm{C}_j(\mathrm{V}) = \{0\}$.*

I Exemples

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que la matrice $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

3. Montrer que $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$ et $T_n^{++}(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la dimension de $S_n(\mathbb{K})$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4. Montrer que $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Vérifier que $\dim T_n^{++}(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

5. Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T AX = 0$. En déduire que $A_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n(\mathbb{R}) = \left\{PMP^{-1} \,\middle|\, M \in T_n^{++}(\mathbb{R})\right\}$.
Indication : on pourra commencer par étudier le cas $n = 2$, en utilisant par exemple la matrice D *introduite à la question 1.*

II Cas réel

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On admettra que toute matrice *réelle* symétrique est diagonalisable.

7. Déterminer l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ qui sont quasi-nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le résultat obtenu tient-il si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

8. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que

$$\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

III Lemme des colonnes

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier n.

9. Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n = 1$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n-1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $C_j(V) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs comme suit

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{\quad K(M) \quad} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \\ \boxed{\quad L(M) \quad} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

10. Montrer que l'ensemble $K(V') = \left\{K(M) \,\middle|\, M \in V'\right\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

11. En déduire qu'il existe un entier $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $E_{n,j} \in V$.

Soit σ une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui même. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On considère l'application linéaire u_σ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ définie sur la base canonique par

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

On considère la matrice P_σ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

12. Vérifier que u_σ est inversible et préciser son inverse.

13. Vérifier que P_σ est la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Montrer que P_σ est inversible et préciser les coefficients de son inverse.

14. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ. *On pourra utiliser un changement de base.*

15. Montrer que l'ensemble $\mathrm{V}^\sigma = \left\{\mathrm{P}_\sigma^{-1}\mathrm{M}\mathrm{P}_\sigma \;\middle|\; \mathrm{M} \in \mathrm{V}\right\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\mathrm{C}_j(\mathrm{V}^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

16. En déduire que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on peut choisir un $f(j) \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}$ tel que $\mathrm{E}_{j,f(j)} \in \mathrm{V}$. On obtient ainsi une fonction $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$.

17. En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1,\ldots,j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [|1,p-1|],\ f(j_k) = j_{k+1} \ \text{ et } \ f(j_p) = j_1.$$

18. Écrire un algorithme qui permet d'identifier une telle suite connaissant les valeurs de f.

19. Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $\mathrm{N} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{E}_{j_k,f(j_k)}$ et conclure.

IV Cas général

On va ici prouver l'inégalité (QN) par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose l'inégalité (QN) établie au rang $n-1$. Soit V un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On rappelle qu'on peut écrire toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et en particulier de V, sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications $\mathrm{K} : \mathrm{V} \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{L} : \mathrm{V} \to \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{W} = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{V} \;\middle|\; \mathrm{L}(\mathrm{M}) = 0\right\}.$$

Jusqu'à la question 21 incluse, on suppose que $\mathrm{C}_n(\mathrm{V}) = \{0\}$.

20. Montrer que $\dim \mathrm{V} \leqslant \dim \mathrm{K}(\mathrm{W}) + (n-1)$.

21. En déduire que $\dim \mathrm{V} \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On ne suppose plus désormais que $\mathrm{C}_n(\mathrm{V}) = \{0\}$.

22. Démontrer que $\dim \mathrm{V} \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

♦ ♦
♦