Corrigé : matrices quasi-nilpotentes (Mines PSI 2016)

I Exemples

1. Le polynôme caractéristique de D est $\chi_D = X^2+1$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(D) = \varnothing$: D est quasi-nipotente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En revanche, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \{-i, i\}$ donc D n'est pas quasi-nilpotente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B = X^2$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{0\}$: B est quasi-nilpotente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

3. L'application $M \mapsto M - M^T$ est linéaire donc son noyau $S_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel.
L'application $M \mapsto M + M^T$ est linéaire donc son noyau $A_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel.
Enfin, $T_n^{++}(\mathbb{K})$ contient la matrice nulle et est stable par combinaison linéaire donc est aussi un sous-espace vectoriel.
Si (E_{ij}) désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la famille $\left(E_{ij}+E_{ji} \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\right)$ est une base de $S_n(\mathbb{K})$ donc $\dim S_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

4. Si $M \in T_n^{++}(\mathbb{K})$, $\chi_M = X^n$ (matrice triangulaire à diagonale nulle) donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ et M est quasi-nilpotente. $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est donc quasi-nilpotent. De plus, la famille $\left(E_{ij} \;\middle|\; 1 \leqslant i < j \leqslant n\right)$ est une base de $T_n^{++}(\mathbb{K})$ donc $\dim S_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

5. Posons $A = (a_{ij})$; on a $a_{ji} = -a_{ij}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On calcule $X^TAX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ (c'est un scalaire). Les variables i et j sont des variables muettes donc on peut aussi écrire $X^TAX = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_jx_i$. Mais alors $X^TAX = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jx_i = -X^TAX$ donc $X^TAX = 0$.
Considérons une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ de A : il existe un vecteur $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. En reportant dans l'égalité $X^TAX = 0$ on obtient $\lambda X^TX = 0$, soit $\lambda\|X\|^2 = 0$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Puisque $X \neq 0$ on a $\|X\| \neq 0$ et ainsi, $\lambda = 0$. On a montré que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$, donc A est quasi-nilpotente et par suite $A_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Commençons par l'observation suivante : si $M \in T_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\chi_M = X^n$ (déterminant d'une matrice triangulaire supérieure).
Considérons maintenant la matrice $A = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{R})$, où D est la matrice définie à la question 1. Son polynôme caractéristique vaut $\chi_A = X^{n-2}(X^2+1)$. Or le polynôme caractéristique est un invariant de similitude, donc s'il existait une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP \in T_n^{++}(\mathbb{R})$, on aurait $\chi_A = X^n$. Une telle matrice P n'existe donc pas.

II Cas réel

7. Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable ; or une matrice quasi-nilpotente ne peut admettre que 0 pour valeur propre, donc la seul matrice symétrique réelle quasi-nilpotente est la matrice nulle.
Ce résultat est mis en défaut à la question 2 lorsqu'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

8. Soit V un sous-espace quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice de $V \cap S_n(\mathbb{R})$ est à la fois symétrique réelle et quasi-nilpotente donc d'après la question 7 est la matrice nulle. Ceci montre que la somme $V \oplus S_n(\mathbb{R})$ est directe. Ainsi, $\dim V + \dim S_n(\mathbb{R}) \leqslant n^2$, soit $V \leqslant n - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

III Lemme des colonnes

9. Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. Seul le premier est quasi-nilpotent, donc le lemme des colonnes est bien vérifié pour $n = 1$.

10. V' est un sous-espace vectoriel de V et K est linéaire, donc $K(V')$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Par ailleurs, $\chi_M = X\chi_{K(M)}$ donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0\} \cup \mathrm{Sp}(K(M))$. On en déduit que si M est quasi-nilpotent il en est de même de K(M). Ainsi, $K(V')$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

11. Par hypothèse de récurrence il existe un entier $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $C_j(K(V')) = \{0\}$. Mais nous avons fait l'hypothèse que $C_j(V) \neq \{0\}$: il existe donc une matrice M dans V, non nulle, dont toutes les colonnes hormis la j^e sont nulles. Cette matrice M appartient à V' donc K(M) appartient à $K(V')$. Ainsi, la j^e colonne de K(M) est nulle. Pour que M soit non nulle il faut donc que le j^e coefficient de L(M) soit non nul, autrement dit que M s'écrive $M = \lambda E_{n,j}$ avec $\lambda \neq 0$. Et puisque V est un sous-espace vectoriel, on a aussi $E_{n,j} \in V$.

12. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u_{\sigma^{-1}}\big(u_\sigma(e_j)\big) = u_{\sigma^{-1}}(e_{\sigma(j)}) = e_{\sigma^{-1}\circ\sigma(j)} = e_j$ donc $u_{\sigma^{-1}} \circ u_\sigma = \mathrm{Id}$. u_σ est bien inversible, d'inverse $u_{\sigma^{-1}}$.

13. $u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)} e_i$ donc $P = \mathrm{Mat}_{(e)}(u_\sigma)$.

Puisque u_σ est inversible, il en est de même de P, et $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{(e)}(u_\sigma^{-1}) = \mathrm{Mat}_{(e)}(u_{\sigma^{-1}}) = (\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (\delta_{\sigma(i),j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ car $i = \sigma^{-1}(j) \iff \sigma(i) = j$.

14. Posons $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $P_\sigma^{-1}MP_\sigma = M' = (m'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ défini par $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = M$. Alors $M' = \mathrm{Mat}_{(e')}(u)$, où $e'_j = e_{\sigma(j)}$ avec $j \in [\![1, n]\!]$.

On calcule avec la matrice M : $u(e_{\sigma(j)}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(j)} e_i$, expression qui s'écrit aussi $u(e_{\sigma(j)}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),\sigma(j)} e_{\sigma(i)}$ puisque σ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

Mais on a aussi avec M' : $u(e_{\sigma(j)}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m'_{i,j} e_{\sigma(i)}$, donc par unicité de la décomposition dans une base, $m'_{i,j} = m_{\sigma(i),\sigma(j)}$.

15. L'application $M \mapsto P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ est linéaire et V est un sous-espace vectoriel donc V^σ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, M et $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ ont même spectre donc V^σ est aussi quasi-nilpotent.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, nous avons fait l'hypothèse qu'il existe une matrice non nulle M de V dont toutes les colonnes hormis la j^e sont nulles. D'après la question précédente, la matrice $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ est non nulle et toutes ses colonnes hormis la $\sigma(j)^e$ sont nulles. Ainsi, $C_{\sigma(j)}(V^\sigma) \neq \{0\}$.
Puisque σ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même ceci peut aussi s'écrire : pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$.

16. Compte tenu de la question 15, on peut appliquer le résultat des questions 10 et 11 à V^σ : quelle que soit la bijection σ il existe un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $E_{n,k} \in V^\sigma$.
On a donc $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} \in V$, et d'après la question 14, $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} = E_{\sigma(n),\sigma(k)}$.
Pour un entier $j \in [\![1, n]\!]$ arbitraire, appliquons ceci à la bijection σ définie par $\sigma(i) = \begin{cases} n & \text{si } i = j \\ j & \text{si } i = n \\ i & \text{sinon} \end{cases}$.

Nous prouvons ainsi que $E_{j,\sigma(k)}$ appartient à V. Or $\sigma(k) \neq j$ puisque $k \neq n$ donc en posant $f(j) = \sigma(k)$ on a bien obtenu les conditions $f(j) \neq j$ et $E_{j,f(j)} \in V$.

17. La suite finie $1, f(1), \ldots, f^n(1)$ est à valeurs dans un ensemble fini à n éléments $[\![1, n]\!]$ donc il existe $i < j$ dans $[\![0, n]\!]$ tel que $f^i(1) = f^j(1)$. Choisissons pour i et j des entiers minimaux (illustration figure 1). Compte tenu de la définition de f on a $j \geqslant i + 2$.

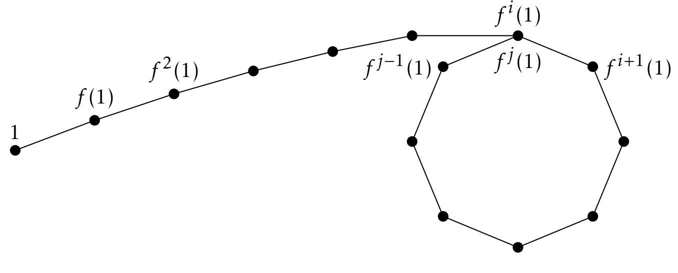

Figure 1 – Une application du lemme dit du « poêle à frire ».

Posons maintenant $j_1 = f^i(1)$, $j_2 = f^{i+1}(1)$, …, $j_p = f^{j-1}(1)$. Ces entiers sont bien deux-à-deux distincts et vérifient $f(j_k) = j_{k+1}$ pour $k \in [\![1, p-1]\!]$ et $f(j_p) = j_1$.

18. On suppose connus les entiers n et la fonction $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$.
La première étape de l'algorithme consiste à trouver le premier entier qui se répète dans la suite des itérés de 1 par f :

```python
v = [False] * (n+1)
j = 1
while not v[j]:
    v[j] = True
    j = f(j)
```

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, le booléen `v[j]` est égal à `True` si et seulement si l'entier j a déjà été rencontré dans la succession des itérés de 1 par f (la case `v[0]` est inutilisée).
Une fois cet entier trouvé, on peut commencer à calculer les valeurs successives $j_1, \dots, j_p$ jusqu'à retrouver j_1 :

```python
l = [j]
k = f(j)
while k != j:
    l.append(k)
    k = f(k)
```

19. Considérons le vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ défini par $x = \sum_{\ell=1}^{p} e_{f(j_\ell)}$.

Nous avons $\mathrm{E}_{j_k, f(j_k)} e_{f(j_\ell)} = \begin{cases} e_{j_k} & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\mathrm{N}x = \sum_{k=1}^{p} e_{j_k}$. Or par construction de la suite $(j_1, \dots, j_p)$ nous avons $\mathrm{N}x = x$.
Puisque x est non nul, 1 est bien valeur propre de N.
Mais d'après la question 16 la matrice N appartient à l'espace vectoriel V, qui, étant supposé quasi-nilpotent, ne peut contenir de matrice ayant une valeur propre non nulle. La contradiction est avérée et nous pouvons conclure : le lemme des colonnes est vrai pour l'entier n.

IV Cas général

20. Considérons l'application $\phi : \mathrm{V} \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ définie par : $\phi(\mathrm{M}) = (\mathrm{K}(\mathrm{M}), \mathrm{L}(\mathrm{M}))$. Cette application est linéaire donc $\dim \mathrm{V} = \dim(\operatorname{Ker} \phi) + \dim(\operatorname{Im} \phi)$.
Soit $\mathrm{M} \in \operatorname{Ker} \phi$; on a $\mathrm{K}(\mathrm{M}) = \mathrm{L}(\mathrm{M}) = 0$. Or par hypothèse, $\mathrm{C}_n(\mathrm{V}) = \{0\}$: la seule matrice de V dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles est la matrice nulle. Ceci montre que $\mathrm{M} = 0$: l'application linéaire ϕ est injective. Ainsi, $\dim \mathrm{V} = \dim(\operatorname{Im} \phi)$.
Considérons maintenant un supplémentaire W′ de W dans V : $\mathrm{V} = \mathrm{W} \oplus \mathrm{W}'$.
Puisque ϕ est injective, $\operatorname{Im} \phi = \phi(\mathrm{V}) = \phi(\mathrm{W}) \oplus \phi(\mathrm{W}')$.
Pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{W}$, $\phi(\mathrm{M}) = (\mathrm{K}(\mathrm{M}), 0)$ donc $\dim(\phi(\mathrm{W})) = \dim(\mathrm{K}(\mathrm{W}))$. Par ailleurs, $\mathrm{W} = \operatorname{Ker} \mathrm{L}$ donc d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{W}' = \dim(\operatorname{Im} \mathrm{L}) \leqslant n-1$ car $\operatorname{Im} \mathrm{L} \subset \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$.
On en déduit que $\dim \mathrm{V} = \dim(\operatorname{Im} \phi) = \dim \mathrm{W} \leqslant \dim(\mathrm{K}(\mathrm{W})) + n - 1$.

21. Considérons une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{W}$: $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{K}(\mathrm{M}) & \mathrm{R}(\mathrm{M}) \\ \mathrm{O} & a(\mathrm{M}) \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{Sp}(\mathrm{M}) = \operatorname{Sp}(\mathrm{K}(\mathrm{M})) \cup \{a(\mathrm{M})\}$. Puisque M est quasi-nilpotente, M n'a pas de valeur propre non nulle donc K(M) non plus. Il en résulte que l'espace vectoriel K(W) est quasi-nilpotent. Par hypothèse de récurrence, $\dim \mathrm{K}(\mathrm{W}) \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ et d'après la question précédente,

$$\dim \mathrm{V} \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

22. D'après le lemme des colonnes, il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $\mathrm{C}_j(\mathrm{V}) = \{0\}$. Si $j \neq n$, considérons la bijection σ de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même qui échange j et n. V^σ est un espace vectoriel isomorphe à V à qui on peut appliquer la question précédente, et ainsi $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{V}^\sigma \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Nous pouvons enfin conclure : la récurrence se propage, l'inégalité (QN) est prouvée pour tout entier $n \geqslant 1$.