Étude d'une série trigonométrique (Mines PC 2007)

Durée : 3 heures

On rappelle que pour tout réel $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Par ailleurs, pour tout réel t,

$$\operatorname{ch} t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

On pose, pour tout réel x et tout $\alpha \in]0,+\infty[$,

$$\mathrm{S}_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha} \tag{1}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier différentes propriétés de cette fonction.

Dans tout le problème, u représente un réel de $]-1,1[$.

I Deux représentations de S_α

1. Prouver que pour tout $\alpha > 1$, la fonction S_α est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier, en fonction du paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$, de la fonction

$$\mathrm{J} : t \mapsto \frac{t^{\gamma-1}}{\mathrm{e}^t - u}$$

Soit $t \geqslant 0$. On pose,

$$\mathrm{R_N}(t) = \left(\frac{u}{\mathrm{e}^t - u} - u\,\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}(u\,\mathrm{e}^{-t})^n\right)t^{\alpha-1}$$

3. Simplifier l'expression de $\mathrm{R_N}$ en l'écrivant sous forme d'une fraction.

4. Prouver que pour tout $u \in]-1,1[$,

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{R_N}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

5. Exprimer, en fonction de $\Gamma(\alpha)$, la constante $\mathrm{K}(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{u\,t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t - u}\,\mathrm{d}t = \mathrm{K}(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n^\alpha} \quad \text{pour tout } u \in]-1,1[. \tag{2}$$

6. On admet que l'identité(2) reste vraie aussi pour $u = \mathrm{e}^{ix}$ où $x \in]0,2\pi[$.
En déduire pour $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ l'identité suivante :

$$\mathrm{S}_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\,\mathrm{d}t$$

7. Montrer, pour tout $u \in]-1,1[$, l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

8. Pour $x \in \mathbb{R}\setminus \pi\mathbb{Z}$, exprimer $\mathrm{S}_\alpha(x)$ en fonction de fonctions trigonométriques et de G_α où

$$\mathrm{G}_\alpha(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \quad \text{pour } u \in]-1,1[$$

avec

$$a_n = \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

II Comportement asymptotique

Soit $\mathrm{B} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $\lambda > 0$ tels que :

$$\mathrm{B}(s) \underset{s\to 0}{=} as^{\lambda-1}\big(1+\mathrm{o}(1)\big) \tag{4}$$

9. Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left|\int_0^{\delta}\Big(\mathrm{B}(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\Big)\mathrm{d}s\right| < \varepsilon\frac{a}{n^{\lambda}}\Gamma(\lambda)$$

10. Prouver que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $\mathrm{C}(\delta) > 0$ (que vous exprimerez sous la forme d'une intégrale indépendante de n) telle que pour tout $n > 1$:

$$\left|\int_{\delta}^{+\infty}\Big(\mathrm{B}(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\Big)\mathrm{d}s\right| \leqslant \mathrm{C}(\delta)\,\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}$$

11. Prouver que, sous ces hypothèses,

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{B}(s)\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s = a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^{\lambda}}\big(1+\mathrm{o}(1)\big) \quad \text{quand } n \to +\infty$$

12. Montrer que pour tout entier naturel n, on peut écrire

$$a_n = \int_0^{+\infty}\frac{\Big(\ln\big(\mathrm{e}^s+\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}\big)\Big)^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s$$

où a_n est défini dans (3). *On pourra effectuer le changement de variable* $\mathrm{e}^s = \mathrm{ch}\, t$.

On pose dorénavant, pour tout $s > 0$,

$$\mathrm{B}(s) = \frac{\Big(\ln\big(\mathrm{e}^s+\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}\big)\Big)^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}}$$

13. Donner un équivalent de la fonction B au voisinage de 0^+.

14. Déterminer la limite de $a_n n^{\alpha/2}$ quand n tend vers l'infini.

♦ ♦
♦