Corrigé : étude d'une série trigonométrique (Mines PC 2007)

I Deux représentations de S_α

1. Pour tout $n \geqslant 1$, notons $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha}$. Sur $\mathbb{R}$ on a $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc lorsque $\alpha > 1$ la convergence de $\sum f_n$ est normale, et donc uniforme, sur $\mathbb{R}$. Les fonctions f_n étant continues, on en déduit que S_α est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Au voisinage de 0 on a $J(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{K}{t^{1-\gamma}}$ où $K = \dfrac{1}{1-u}$ est une constante non nulle donc J est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\gamma > 0$.
Au voisinage de $+\infty$ on a $J(t) \underset{+\infty}{\sim} t^{\gamma-1}\,e^{-t} \underset{+\infty}{=} O(e^{-t/2})$ donc la fonction J est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$.
En conclusion, J est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\gamma > 0$.

3. Pour tout $t \geqslant 0$ on a $u\,e^{-t} \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} (u\,e^{-t})^n = \frac{1-(u\,e^{-t})^N}{1-u\,e^{-t}}$ et ainsi

$$R_N(t) = \left(\frac{u}{e^t - u} - \frac{u\big(1-(u\,e^{-t})^N\big)}{e^t - u}\right) t^{\alpha-1} = \frac{u(u\,e^{-t})^N}{e^t - u}\, t^{\alpha-1}$$

4. Appliquons le théorème de convergence dominée.
– La fonction R_N est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$;
– La suite de fonctions (R_N) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,+\infty[$ car $0 < u\,e^{-t} < 1$ et compte tenu de l'expression obtenue à la question précédente ;
– $|R_N(t)| \leqslant \dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t - u} = \phi(t)$.
La fonction ϕ est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 2 (car $\alpha > 0$) donc le théorème s'applique : la fonction R_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} R_N(t)\,dt = 0$.

5. La fonction $t \mapsto \dfrac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t - u}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 2, et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t - u}\,dt = \int_0^{+\infty} \left(u\,e^{-t} \sum_{n=0}^{N-1} (u\,e^{-t})^n t^{\alpha-1} + R_N(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\, t^{\alpha-1}\,dt + \int_0^{+\infty} R_N(t)\,dt$$

car il s'agit d'une somme finie de fonctions intégrables.
Le changement de variable bijectif $x = (n+1)t$ donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\, t^{\alpha-1}\,dt = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(n+1)^\alpha}$ et en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t - u} = \Gamma(\alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{n+1}}{(n+1)^\alpha} = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^\alpha}$.

6. En admettant que cette formule reste vraie pour $u = e^{ix}$ avec $x \in]0, 2\pi[$ on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}\,t^{\alpha-1}}{e^t - e^{ix}}\,dt = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ et en ne considérant que la partie imaginaire : $\Gamma(\alpha) S_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}\,t^{\alpha-1}}{e^t - e^{ix}}\right) dt$. On calcule :

$$\frac{e^{ix}}{e^t - e^{ix}} = \frac{e^{ix}(e^t - e^{-ix})}{|e^t - e^{ix}|^2} = \frac{e^t\,e^{ix} - 1}{(e^t - \cos x)^2 + \sin^2 x} = \frac{e^t\,e^{ix} - 1}{e^{2t} - 2\,e^t \cos x + 1} = \frac{e^{ix} - e^{-t}}{e^t - 2\cos x + e^{-t}} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{ix} - e^{-t}}{\operatorname{ch} t - \cos x}$$

et ainsi $S_\alpha(x) = \dfrac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{\operatorname{ch} t - \cos x}$, égalité qui reste vraie pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ par 2π-périodicité.

7. Pour tout $t>0$ on a $\dfrac{1}{\operatorname{ch}t-u}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}t}\left(\dfrac{1}{1-\frac{u}{\operatorname{ch}t}}\right)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}t}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{u^n}{(\operatorname{ch}t)^n}$ donc $\dfrac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}t-u}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)$ avec $f_n(t)=u^n\dfrac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch}t)^{n+1}}$.
Appliquons maintenant le théorème d'interversion somme / intégrale.

– f_n est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0,+\infty[$ car $f_n(t)\underset{0}{\sim}\dfrac{u^n}{t^{1-\alpha}}$ avec $\alpha>0$, et $f_n(t)\underset{+\infty}{\sim}2^{n+1}u^n t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\underset{+\infty}{=}\mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t/2})$;

– La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $t\mapsto\dfrac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}t-u}$, continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.

– Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=|u|^n\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch}t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{K}|u|^n$ où $\displaystyle\mathrm{K}=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}t}\,\mathrm{d}t$ est une constante.

Puisque la série $\sum|u|^n$ converge le théorème d'interversion s'applique : il prouve que la fonction $t\mapsto\dfrac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}t-u}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}t-u}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}u^n\frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch}t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$.

8. Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ on a $\cos x\in\,]-1,1[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}t-\cos x}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}(\cos x)^n\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch}t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$ et d'après la question 6, $\displaystyle\mathrm{S}_\alpha(x)=\frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{+\infty}(\cos x)^n\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch}t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t=\frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)}\mathrm{G}_\alpha(\cos x)$ avec les notations de l'énoncé.

II Comportement asymptotique

9. Soit $\epsilon>0$. Par définition il existe $\delta>0$ tel que pour tout $s\in[0,\delta]$, $\left|\mathrm{B}(s)-as^{\lambda-1}\right|\leqslant\epsilon as^{\lambda-1}$, ce qui conduit à la majoration :

$$\left|\int_0^\delta\left(\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{-ns}-as^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant\epsilon a\int_0^\delta s^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s\leqslant\epsilon a\int_0^{+\infty}s^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s$$

Le changement de variable $t=ns$ donne $\displaystyle\int_0^{+\infty}s^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{n^\lambda}\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}$, d'où :

$$\left|\int_0^\delta\left(\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{-ns}-as^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant\epsilon\frac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)$$

10. On a $|\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{-ns}|\leqslant|\mathrm{B}(s)|$ et $|as^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}|\underset{+\infty}{=}\mathrm{O}(\mathrm{e}^{-s/2})$ donc la fonction $s\mapsto\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{-ns}-as^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}$ est intégrable sur $[\delta,+\infty[$ pour $n\geqslant1$, et pour $n>1$ on peut majorer de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\left|\int_\delta^{+\infty}\left(\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{-ns}-as^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}\right)\mathrm{d}s\right|&\leqslant\int_\delta^{+\infty}\left|\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{-ns}-as^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}\right|\mathrm{d}s=\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n-1)s}\left|\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{-s}-as^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-s}\right|\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}\left|\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{-s}-as^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-s}\right|\mathrm{d}s=\mathrm{C}(\delta)\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}\end{aligned}$$

où $\displaystyle\mathrm{C}(\delta)=\int_\delta^{+\infty}\left|\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{-s}-as^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-s}\right|\mathrm{d}s$.

11. Les deux questions précédentes montrent que pour tout $\epsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que pour tout $n>1$,

$$\left|\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{ns}-as^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant\epsilon\frac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)+\mathrm{C}(\delta)\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$ on a $\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}\underset{+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\lambda}\right)$ donc il existe un rang à partir duquel $\mathrm{C}(\delta)\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}\leqslant\epsilon\dfrac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)$.
Par ailleurs on a déjà calculé $\displaystyle\int_0^{+\infty}as^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s=\frac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)$ (à l'aide du changement de variable $t=ns$) donc nous avons montré l'existence d'un rang à partir duquel $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s-\frac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)\right|\leqslant2\epsilon\dfrac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)$, ce qui traduit l'égalité demandée :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{B}(s)\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s\underset{+\infty}{=}\frac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)\bigl(1+\mathrm{o}(1)\bigr)$$

12. Commençons par résoudre pour $s > 0$ l'équation $\mathrm{e}^s = \operatorname{ch} t$ d'inconnue $t > 0$:

$$\mathrm{e}^s = \operatorname{ch} t \iff 2\,\mathrm{e}^s = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \iff \mathrm{e}^{2t} - 2\,\mathrm{e}^s\,\mathrm{e}^t + 1 = 0.$$

On a donc $\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^s + \sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}$ ou $\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^s - \sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}$ mais cette dernière solution est à rejeter car $\mathrm{e}^t > 1$. Ainsi, $t = \ln\left(\mathrm{e}^s + \sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}\right)$.

Le changement de variable $s = \ln(\operatorname{ch} t)$ est bijectif et $\mathrm{d}s = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}}$. Ainsi,

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln\left(\mathrm{e}^s + \sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}\right)\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s$$

13. Au voisinage de 0, $\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1} \underset{0}{\sim} \sqrt{2s}$ donc $\mathrm{e}^s + \sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1} = 1 + \sqrt{2s} + \mathrm{o}(\sqrt{s})$ et $\ln\left(\mathrm{e}^s + \sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}\right) \underset{0}{\sim} \sqrt{2s}$. Ainsi, $\mathrm{B}(s) \underset{0}{\sim} (\sqrt{2s})^{\alpha-2}$.

14. Posons $a = (\sqrt{2})^{\alpha-2}$ et $\lambda = \dfrac{\alpha}{2}$. Alors $\mathrm{B}(s) \underset{0}{\sim} as^{\lambda-1}$, autrement dit $\mathrm{B}(s) \underset{0}{=} as^{\lambda-1}\big(1+\mathrm{o}(1)\big)$.

On peut donc appliquer la question 11 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{B}(s)\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s = a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}\big(1+\mathrm{o}(1)\big)$ et ainsi $a_n = (\sqrt{2})^{\alpha-2}\dfrac{\Gamma(\alpha/2)}{n^{\alpha/2}}\big(1+\mathrm{o}(1)\big)$, ce qui signifie que $\lim a_n n^{\alpha/2} = (\sqrt{2})^{\alpha-2}\Gamma(\alpha/2)$.