Autour du noyau de Poisson (Mines PC 2009)

A Question préliminaire

1. $\dfrac{u^{x-1}}{1+u} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1-x}}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u$ converge si et seulement si $x > 0$.

$\dfrac{u^{-x}}{1+u} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{u^{x}}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u}\,\mathrm{d}u$ converge si et seulement si $x < 1$.

Si $0 < x < 1$ les deux intégrales convergent donc leur somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}\,\mathrm{d}u$ aussi.
Si $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$ l'une de ces deux intégrales converge et l'autre diverge donc leur somme diverge.

B Une identité intégrale

2. f est développable en série entière sur $[0,y]$ donc l'application $v \mapsto f(yv)$ est continue sur $[0,1]$ et bornée : il existe $\mathrm{M}_y \geqslant 0$ tel que pour tout $v \in [0,1]$, $|f(yv)| \leqslant \mathrm{M}_y$.

Ainsi, $|v^{x-1}f(yv)| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}_y}{v^{1-x}}$ et $v \mapsto \dfrac{1}{v^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ donc $v \mapsto v^{x-1}f(yv)$ aussi.

3. Commençons par observer qu'il n'y a pas lieu de distinguer la valeur $y = 0$ dans l'expression $\mathrm{S}[f](x,y) = \displaystyle\int_0^1 v^{x-1}f(yv)\,\mathrm{d}v$ puisque $\displaystyle\int_0^1 v^{x-1}f(0)\,\mathrm{d}v = \frac{f(0)}{x}$.

Posons donc (à $x > 0$ fixé) $g(y,v) = v^{x-1}f(yv)\,\mathrm{d}v$ et appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

– pour tout $y \in [0,1[$, l'application $v \mapsto g(y,v)$ est continue par morceaux ;

– pour tout $v \in]0,1]$, l'application $y \mapsto g(y,v)$ est continue ;

– soit $\alpha < 1$; f est continue (car développable en série entière) sur $[0,\alpha]$ donc bornée : ainsi, pour tout $v \in]0,1]$, $|g(y,v)| \leqslant v^{x-1}\|f\|_{\infty,[0,\alpha]} = \phi(v)$. La fonction ϕ est intégrable sur $]0,1]$ donc le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique : la fonction $y \mapsto \mathrm{S}[f](x,y)$ est continue sur $[0,\alpha]$ puis par recouvrement sur $[0,1[$.

4. On a $\mathrm{S}[f](x,y) = \displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n v^{x-1+n}\,\mathrm{d}v$. Nous allons appliquer le théorème d'interversion somme / intégrale ; pour cela on pose à $x \in \mathcal{F}$ et $y \in [0,1[$ fixés, $u_n(v) = a_n y^n v^{x-1+n}$.

– Les fonctions u_n sont continues par morceaux sur $[0,1[$;

– la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement vers la fonction $v \mapsto v^{x-1}f(yv)$, continue par morceaux ;

– on calcule $\displaystyle\int_0^1 |u_n(v)|\,\mathrm{d}v = |a_n|\frac{y^n}{x+n}$. On a $|a_n|\dfrac{y^n}{x+n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(|a_n|y^n)$. La série $\sum |a_n|y^n$ converge donc $\displaystyle\sum \int_0^1 |u_n(v)|\,\mathrm{d}v$ aussi.

Le théorème s'applique donc, et $\mathrm{S}[f](x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x+n} y^n$.

Remarque. On peut se demander pour quelle raison supposer $x \in \mathcal{F}$; l'hypothèse $x > 0$ est suffisante pour établir ce résultat.

5. $\displaystyle\int_0^1 \cos(\pi(n+x)t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(\pi(n+x)t)}{\pi(n+x)}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{(-1)^n\sin(\pi x)}{\pi(n+x)}$ donc $\mathrm{I}_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$.

6. Nous avons ici $\mathrm{J}[f](x,y) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n y^n \cos(\pi(n+x)t)\,\mathrm{d}t$ et il s'agit de nouveau d'intervertir somme et intégrale. Pour $x \in \mathcal{F}$ et $y \in [0,1[$ fixés, on pose $u_n(v) = (-1)^n a_n y^n \cos(\pi(n+x)t)$.

Sur l'intervalle $[0,1]$ on a $\|u_n\|_\infty \leqslant |a_n|y^n$ et $\sum |a_n|y^n$ converge donc la convergence de $\sum u_n$ est normale sur le segment $[0,1]$, *a fortiori* uniforme. On peut appliquer cette fois le théorème d'interversion des séries de fonctions pour obtenir : $\mathrm{J}[f](x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n \mathrm{I}_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x+n} y^n$ d'après la question précédente.
Compte tenu du résultat obtenu à la question 4, on a prouvé que $\mathrm{J}[f](x,y) = \mathrm{S}[f](x,y)$ pour $x \in \mathcal{F}$ et $y \in [0,1[$.

7. g est bien développable en série entière sur $[0,1[$: $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ donc pour tout $z \in \mathcal{D}$, $\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$.

Ainsi, $\mathrm{J}[g](x,y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \Re\Big(\frac{e^{i\pi x t}}{1-y\,e^{i\pi t}}\Big)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \Re\Big(\frac{e^{i\pi x t}(1-y\,e^{-i\pi t})}{(1-y\cos(\pi t))^2 + y^2\sin(\pi t)^2}\Big)\mathrm{d}t$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi x t) - y\cos(\pi(1-x)t)}{y^2 - 2y\cos(\pi t) + 1}\,\mathrm{d}t.$$

De même, $\mathrm{J}[g](1-x,y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) - y\cos(\pi x t)}{y^2 - 2y\cos(\pi t) + 1}\,\mathrm{d}t$. En sommant on obtient :

$$\mathrm{C}[g](x,y) = \frac{\pi(1-y)}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) + \cos(\pi x t)}{y^2 - 2y\cos(\pi t) + 1}\,\mathrm{d}t.$$

C Noyau de Poisson

8. On multiplie par l'expression conjuguée du dénominateur :
$\frac{1+y\,e^{i\pi t}}{1-y\,e^{i\pi t}} = \frac{(1+y\,e^{i\pi t})(1-y\,e^{-i\pi t})}{|1-y\,e^{i\pi t}|^2} = \frac{1-2iy\sin(\pi t)-y^2}{(1-y\cos(\pi t))^2+\sin(\pi t)^2}$ donc $\Re\Big(\frac{1+y\,e^{i\pi t}}{1-y\,e^{i\pi t}}\Big) = \frac{1-y^2}{1-2y\cos(\pi t)+y^2} = \mathrm{P}(t,y)$.

9. Pour $t \in [0,1]$ fixé, la fonction $y \mapsto \frac{1}{1-y\,e^{i\pi t}}$ est développable en série entière sur $[0,1[$, et $\frac{1}{1-y\,e^{i\pi t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n\,e^{i\pi n t}$. Il en est donc de même de la fonction $y \mapsto \frac{1+y\,e^{i\pi t}}{1-y\,e^{i\pi t}}$, et $\frac{1+y\,e^{i\pi t}}{1-y\,e^{i\pi t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n\,e^{i\pi n t} + \sum_{n=0}^{+\infty} y^{n+1}\,e^{i\pi(n+1)t} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} y^n\,e^{i\pi n t}$.

D'après la question précédente, $y \mapsto \mathrm{P}(t,y)$ est développable en série entière sur $[0,1[$, et $\mathrm{P}(t,y) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} y^n\cos(\pi n t)$.

10. Posons à $y \in [0,1[$ fixé $u_n(t) = y^n\cos(\pi n t)$. Sur $[0,1]$ on a $\|u_n\|_\infty = y^n$ donc la série $\sum u_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[0,1]$. D'après le théorème d'interversion somme / intégrale relatif aux séries de fonctions, on a $\int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\,\mathrm{d}t = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} y^n \int_0^1 \cos(\pi n t)\,\mathrm{d}t = 1$.

11. Pour $y \in [0,1[$ fixé la fonction $t \mapsto \mathrm{P}(t,y)$ est positive et décroissante sur $[0,1]$ donc

$$\Big|\int_\alpha^1 \mathrm{P}(t,y)\phi(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_\alpha^1 \mathrm{P}(t,y)|\phi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|\phi\|_\infty(1-\alpha)\mathrm{P}(\alpha,y).$$

Or $\lim_{y\to 1} \mathrm{P}(\alpha,y) = 0$ donc $\lim_{y\to 1} \int_\alpha^1 \mathrm{P}(t,y)\phi(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
De même, $\Big|\int_0^\alpha \mathrm{P}(t,y)\phi(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \sup_{t\in[0,\alpha]} |\phi(t)| \int_0^\alpha \mathrm{P}(t,y)\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{t\in[0,\alpha]} |\phi(t)| \int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\,\mathrm{d}t = \sup_{t\in[0,\alpha]} |\phi(t)|$.

12. Posons $\delta(y) = \Big|\int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\phi(t)\,\mathrm{d}t - \phi(0)\Big| = \Big|\int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\big(\phi(t)-\phi(0)\big)\,\mathrm{d}t\Big|$ d'après la question 10.
ϕ est continue en 0 donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que pour tout $t \in [0,\alpha]$, $\big|\phi(t)-\phi(0)\big| \leqslant \epsilon$. On écrit alors

$$\delta(y) \leqslant \int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\big|\phi(t)-\phi(0)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \epsilon\int_0^\alpha \mathrm{P}(t,y)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^1 \mathrm{P}(t,y)\big|\phi(t)-\phi(0)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \epsilon + \int_\alpha^1 \mathrm{P}(t,y)\big|\phi(t)-\phi(0)\big|\,\mathrm{d}t = \theta(y).$$

D'après la question précédente appliquée à $\phi-\phi(0)$, $\lim\limits_{y\to1}\theta(y)=\epsilon$ donc il existe $\beta\in\,]0,1[$ tel que pour tout $y\in[\beta,1[$, $\theta(y)\leqslant 2\epsilon$. Nous avons donc prouvé l'existence pour tout $\epsilon>0$ d'un réel $\beta\in\,]0,1[$ tel que pour tout $y\in[\beta,1[$, $|\delta(y)|\leqslant 2\epsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{y\to1}\delta(y)=0$, et donc que $\lim\limits_{y\to1}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\phi(t)\,\mathrm{d}t=\phi(0)$.

D Application à un calcul d'intégrale

13. D'après la question 7, $\mathrm{C}[g](x,y)=\dfrac{\pi}{(1+y)\sin(\pi x)}\big(\mathrm{A}(x,y)+\mathrm{A}(1-x,y)\big)$.

14. Pour $x\in\,]0,1[$ fixé et d'après la question 12, $\lim\limits_{y\to1}\mathrm{A}(x,y)=\lim\limits_{y\to1}\mathrm{A}(1-x,y)=1$ donc $\lim\limits_{y\to1}\mathrm{C}[g](x,y)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

15. D'après la partie B nous avons $\mathrm{C}[g](x,y)=\mathrm{S}[g](x,y)+\mathrm{S}[g](1-x,y)=\displaystyle\int_0^1\frac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+yv}\,\mathrm{d}v$; nous allons montrer que $\lim\limits_{y\to1}\mathrm{C}[g](x,y)=\mathrm{I}(x)$. Pour cela, on considère une suite (y_n) qui converge vers 1 et on applique le théorème de convergence dominée à la suite $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(v)\,\mathrm{d}v$ avec $f_n(v)=\dfrac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+y_nv}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $]0,1]$.
- La suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers $f:v\mapsto\dfrac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+v}$, continue par morceaux sur $[0,1[$.
- Pour tout $v\in[0,1[$, $|f_n(v)|\leqslant\left|\dfrac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+v}\right|=\phi(v)$.

La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ d'après la question 1 donc le théorème de convergence dominée s'applique : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\mathrm{I}(x)$.

D'après la caractéristique séquentielle de la limite, $\lim\limits_{y\to1}\mathrm{C}[g](x,y)=\mathrm{I}(x)$ et d'après la question 14, $\mathrm{I}(x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.