Corrigé : variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion (Mines PC 2021)

Questions de cours

1. X est d'espérance finie lorsque la somme $\sum_{n\in I} |x_n|\mathbb{P}(X = x_n)$ est finie ou convergente. D'après le théorème de transfert, il en résulte que X est d'espérance finie si et seulement si |X| est d'espérance finie.

2. Si X est bornée par M alors pour tout $|x_n| > M$, $X = x_n \implies |X| > M$ donc $\mathbb{P}(X = x_n) \leqslant \mathbb{P}(|X| > M) = 0$. Il en résulte que $\sum_{n\in I} |x_n|\mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{\substack{n\in I\\ |x_n|\leqslant M}} |x_n|\mathbb{P}(X = x_n) \leqslant M \sum_{n\in I} \mathbb{P}(X = x_n) = M$ donc X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3. |X| est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc si |X| possède une espérance alors $\mathbb{E}(|X|) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X| \geqslant n)$. Mais $\mathbb{P}(|X| \geqslant n) \sim \frac{\alpha}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc ceci est absurde. On en déduit que |X| et donc X (question 1) ne possède pas d'espérance.
Puisque X vérifie $(\mathcal{D}_\alpha)$ on a $\mathbb{P}(|X|^2 \geqslant n) = \mathbb{P}(|X| \geqslant \sqrt{n}) \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$. Il en résulte que la série $\sum \mathbb{P}(X^2 \geqslant n)$ diverge et donc que X^2 ne possède pas non plus d'espérance.

4. D'après le théorème 1, si X est symétrique alors $f(X)$ et $f(-X)$ suivent la même loi. Si, de plus, f est impaire alors $f(-X) = -f(X)$ donc $f(X)$ est symétrique.
Supposons de plus $f(X)$ d'espérance finie. L'égalité $f(-X) = -f(X)$ montre que $\mathbb{E}(f(-X)) = -\mathbb{E}(f(X))$. Mais $f(X)$ et $f(-X)$ suivent la même loi donc ont même espérance, et ainsi $\mathbb{E}(f(X)) = 0$.

5. X et Y sont indépendantes donc pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}((X, Y) = (-x, -y)) = \mathbb{P}(X = -x)\mathbb{P}(Y = -y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$, ce qui montre que (X, Y) est symétrique. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y$ est impaire donc d'après la question précédente, X + Y est symétrique.

Deux sommes de séries

6. La fonction $u \mapsto \frac{z}{1-uz}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ (compte tenu des hypothèses faites sur z) donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, L est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1]$, et $L'(t) = \frac{z}{1-tz}$.
On démontre ensuite par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $L^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!z^n}{(1-tz)^n}$.

7. Posons $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leqslant r < 1$ ou $r = 1$ et $\theta \not\equiv 0 \mod 2\pi$. On calcule $|1-tz|^2 - (1-t)^2 = t\big(2 - 2r\cos\theta - t(1-r^2)\big)$.
   - Si $r = 1$ alors $\cos\theta < 1$ et $|1-tz|^2 - (1-t)^2 = 2t(1-\cos\theta) > 0$;
   - si $r < 1$ alors $|1-tz|^2 - (1-t)^2 \geqslant t\big(2-2r-t(1-r^2)\big) \geqslant t\big(2-2r-(1-r^2)\big) = t(1-r)^2 > 0$

donc dans tous les cas, $|1-tz| > 1-t$.

8. Posons pour z fixé $u_n(t) = \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n$ et appliquons le théorème de con,vergence dominée :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue (par morceaux) et donc intégrable sur $[0, 1]$;
   - la suite (u_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux $u : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ sur $[0, 1]$ (question 7) ;
   - pour tout $|u_n(t)| \leqslant 1 = \phi(t)$.

La fonction ϕ est continue (par morceaux) et intégrable sur $[0, 1]$ donc le théorème s'applique : $\lim \int_0^1 u_n(t)\,dt = 0$.

Procédons de la même façon avec $v_n(t) = \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}$.

– pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue (par morceaux) et donc intégrable sur $[0,1]$;
– la suite (v_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux $v : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ sur $[0,1]$;
– pour tout $|v_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{|1-tz|} 1 = \psi(t)$.

La fonction ψ est continue (par morceaux) et intégrable sur $[0,1]$ donc le théorème s'applique : $\lim \int_0^1 v_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

9. D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\mathrm{L}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{L}(0)}{n!} + \int_0^1 (1-t)^n \frac{\mathrm{L}^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient compte tenu de la question précédente $\mathrm{L}(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k}$.

10. Les applications $(t,u) \mapsto u$ et $(t,u) \mapsto \mathrm{e}^{it}$ sont continues; par bilinéarité $(t,u) \mapsto u\,\mathrm{e}^{it}$ est continue. La fonction $z \mapsto |1+z|$ étant continue, par composition $(t,u) \mapsto |1+u\,\mathrm{e}^{it}|$ est continue.
$\mathrm{K} = [-a,a] \times [0,1]$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$ donc γ est minorée sur K et atteint sa borne inférieure en un point (u_0,t_0) de K. En posant $m_a = \gamma(u_0,t_0)$ on a $m_a > 0$ et pour tout $(t,u) \in \mathrm{K}$, $|1+u\,\mathrm{e}^{it}| \geqslant m_a$.

11. Posons $f(t,u) = \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{1+u\,\mathrm{e}^{it}}$ et appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :
– pour tout $t \in]-\pi,\pi[$, $u \mapsto f(t,u)$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$;
– pour tout $u \in [0,1]$, $t \mapsto f(t,u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$, et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(u,t) = \dfrac{i\,\mathrm{e}^{it}}{(1+u\,\mathrm{e}^{it})^2}$;
– pour tout $t \in]-\pi,\pi[$, $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,u)$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$;
– pour tout $a \in]0,\pi[$, pour tout $t \in [-a,a]$ et $u \in [0,1]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,u)\right| \leqslant \dfrac{1}{m_a^2} = \phi(u)$.

La fonction constante ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$ donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a,a]$, puis sur $]-\pi,\pi[$ par recouvrement, et

$$\forall t \in]-\pi,\pi[, \qquad \mathrm{F}'(t) = i\,\mathrm{e}^{it}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u\,\mathrm{e}^{it})^2}$$

12. On calcule $\mathrm{F}'(t) = \left[\dfrac{-i}{1+u\,\mathrm{e}^{it}}\right]_0^1 = i - \dfrac{i}{1+\mathrm{e}^{it}} = \dfrac{i}{2} + \dfrac{i}{2}\Big(\dfrac{\mathrm{e}^{it}-1}{\mathrm{e}^{it}+1}\Big) = \dfrac{i}{2} + \dfrac{i}{2}\Big(\dfrac{\mathrm{e}^{it/2}-\mathrm{e}^{-it/2}}{\mathrm{e}^{it/2}+\mathrm{e}^{-it/2}}\Big) = \dfrac{i}{2} - \dfrac{\tan(t/2)}{2}$.
Il existe donc une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\mathrm{F}(t) = \ln(\cos(t/2)) + \dfrac{it}{2} + \lambda$ avec $\lambda = \mathrm{F}(0) = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln 2$, soit :

$$\mathrm{F}(t) = \ln(2\cos(t/2)) + \frac{it}{2}$$

13. Pour tout $\theta \in]0,2\pi[$, $\theta - \pi \in]-\pi,\pi[$ et $\mathrm{F}(\theta-\pi) = \int_0^1 \dfrac{-\mathrm{e}^{i\theta}}{1-u\,\mathrm{e}^{i\theta}}\,\mathrm{d}u = -\mathrm{L}(1)$ en posant $z = \mathrm{e}^{i\theta}$.
D'après la question 12, $\mathrm{F}(\theta-\pi) = \ln(2\sin(\theta/2)) + i\dfrac{\theta-\pi}{2}$ et d'après la question 9, $\mathrm{F}(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}$.
En séparant parties réelle et imaginaire on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln(2\sin(\theta/2))$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{n} = \dfrac{\pi-\theta}{2}$.

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

14. La variable aléatoire $\cos(t\mathrm{X})$ est bornée donc possède une espérance; Φ_X est donc bien définie.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_\mathrm{X}(-t) = \mathbb{E}(\cos(-t\mathrm{X})) = \mathbb{E}(\cos(t\mathrm{X})) = \Phi_\mathrm{X}(t)$ donc Φ_X est paire. Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(t\mathrm{X}) \leqslant 1$ et par croissance de l'espérance, $\mathbb{E}(-1) \leqslant \mathbb{E}(\cos(t\mathrm{X}))| \leqslant \mathbb{E}(1)$ soit $|\Phi_\mathrm{X}(t)| \leqslant 1$.

15. D'après le théorème de transfert, $\Phi_X(t) = \sum_{n \in I} \cos(tx_n)\mathbb{P}(X = x_n)$. Si cette somme est finie la continuité de Φ_X est évidente ; si cette somme est dénombrable on peut sans perte de généralité prendre $I = \mathbb{N}$.
Dans ce cas, $\left|\cos(tx_n)\mathbb{P}(X = x_n)\right| \leqslant \mathbb{P}(X = x_n)$ et la convergence de $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ (la somme vaut 1) montre que la convergence de cette série de fonctions est normale, et donc uniforme sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve la continuité de Φ_X (chacune des fonctions qui composent la somme étant continue).

16. $\Phi_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos(nt)\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt)\big(\mathbb{P}(X = -n) + \mathbb{P}(X = n)\big)$.
Pour tout $n \geqslant 1$, $R_n = \mathbb{P}(X \geqslant n) + \mathbb{P}(X \leqslant -n)$ donc

$$\mathbb{R}_n - R_{n+1} = \mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X \geqslant n+1) + \mathbb{P}(X \leqslant -n) - \mathbb{P}(X \leqslant -n-1) = \mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(X = -n)$$

Enfin, $R_0 = 1$ et $R_1 = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$ donc $R_0 - R_1 = \mathbb{P}(X = 0)$. On a donc bien $\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1})\cos(nt)$.

On a $\sum_{n=0}^{N} (R_n - R_{n+1})\cos(nt) = \sum_{n=0}^{N} R_n \cos(nt) - \sum_{n=1}^{N+1} R_n \cos(n-1)t = R_0 + \sum_{n=1}^{N} R_n\big(\cos(nt) - \cos(n-1)t\big) - R_{N+1}\cos(Nt)$.
On a $R_0 = 1$ et $R_n \sim \dfrac{\alpha}{n}$ donc $\lim_{N \to +\infty} R_{N+1}\cos(Nt) = 0$. On peut donc passer à la limite pour obtenir :

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\big(\cos(nt) - \cos(n-1)t\big)$$

17. On a $R_n - \dfrac{\alpha}{n} = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc la série $\sum \Big(R_n - \dfrac{\alpha}{n}\Big)e^{int}$ converge absolument, ce qui justifie l'existence de C.
D'après la question 13, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{int}}{n} = -\ln\Big(2\sin\Big(\dfrac{t}{2}\Big)\Big) + i\dfrac{\pi - t}{2}$ donc la série $\sum R_n e^{int}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n e^{int} = C - \alpha\ln\Big(2\sin\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big) + \alpha i\frac{\pi - t}{2}$$

Au voisinage de 0, $\ln\Big(2\sin\Big(\dfrac{t}{2}\Big)\Big) = \ln\big(t + O(t^2)\big) = \ln t + O(1)$ donc en séparant parties réelle et imaginaire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln t) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \alpha\frac{\pi}{2} + o(1)$$

18. D'après la question 16,

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\big(\cos(nt) - (\cos t)\cos(nt) - (\sin t)\sin(nt)\big) = 1 + (1 - \cos t)O(\ln t) - (\sin t)\Big(\alpha\frac{\pi}{2} + o(1)\Big)\\ &= 1 + O(t^2 \ln t) - \alpha\frac{\pi}{2}t + o(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2}t + o(1)\end{aligned}$$

La fonction Φ_X possède en 0+ un développement limité d'ordre 1 donc Φ_X est dérivable à droite en 0. Cependant, Φ_X est paire et cette dérivée à droite n'est pas nulle, donc Φ_X n'est pas dérivable en 0.

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19. On sait (question 5) que $X + Y$ est symétrique, et $\Phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(\cos(t(X+Y))) = \mathbb{E}(\cos(tX)\cos(tY)) - \mathbb{E}(\sin(tX)\sin(tY)) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) - \mathbb{E}(\sin(tX)\sin(tY))$ par linéarité de l'espérance (ces variables aléatoires possèdent une espérance car bornées). D'après le lemme des coalitions, $\sin(tX)$ et $\sin(tY)$ sont indépendantes donc $\mathbb{E}(\sin(tX)\sin(tY)) = \mathbb{E}(\sin(tX))\mathbb{E}(\sin(tY))$. Enfin, la fonction sin étant impaire, on a d'après la question 4 $\mathbb{E}(\sin(tX)) = \mathbb{E}(\sin(tY)) = 0$, donc $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$.

20. Par récurrence on prouve à l'aide de la question 5 que M_n est symétrique, et à l'aide de la question 19 que $\Phi_{M_n}(t) = \big(\Phi_{X_1/n}(t)\big)^n$. Or $\Phi_{X_1/n}(t) = \mathbb{E}\big(\cos(tX_1/n)\big) = \Phi_{X_1}(t/n)$ donc $\Phi_{M_n}(t) = \Phi_{X_1}(t/n)^n$.

21. Fixons $t > 0$. D'après la question 18 on a $\Phi_{X_1}(t/n) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\pi\alpha}{2}\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{X_1}(t/n)^n = \exp(-\pi\alpha t/2)$.
la fonction Φ_{X_1} étant paire, on a pour $t < 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{X_1}(t/n)^n = \exp(\pi\alpha t/2)$.
On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{X_1}(t/n)^n = \exp(-\pi\alpha|t|/2)$.

22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_{M_n}(2n\pi) = \Phi_{X_1}(2\pi)^n = \mathbb{E}(\cos(2\pi X_1))^n = 1$ car X_1 est à valeurs entières.
En revanche, $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{2\pi^2\alpha n}{2}\right) = 0$, donc la suite $\left(\Phi_{M_n}(2\pi n) - \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}|2\pi n|\right)\right)$ ne tend pas vers 0. La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.