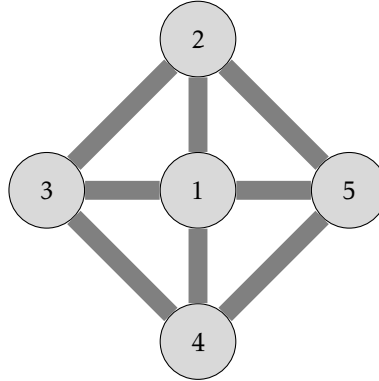


# MARCHE ALÉATOIRE DANS UN LABYRINTHE (MINES PC 2017)

Durée : 3 heures

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés  $0, 1, 2, \dots, k, \dots$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). On admet que, si le rat se trouve à l'instant  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) dans la salle numéro  $i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle  $i$  et se trouvera donc, à l'instant  $k + 1$ , avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle  $i$ . On admet que l'on peut introduire, pour tout  $k$  entier naturel, une variable aléatoire  $S_k$  donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant  $k$ . A titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = 1 \mid S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 3 \mid S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 5 \mid S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on introduit la matrice colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k = 1) \\ \mathbb{P}(S_k = 2) \\ \mathbb{P}(S_k = 3) \\ \mathbb{P}(S_k = 4) \\ \mathbb{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R}).$$

Pour une matrice  $B$ ,  $B^T$  représente sa matrice transposée.

## I Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que  $\mathbb{P}(S_{k+1} = 1)$  s'écrit comme combinaison linéaire des  $\mathbb{P}(S_k = i)$  pour  $i = 1, \dots, 5$ .
2. Expliciter la matrice carrée  $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$  telle que  $X_{k+1} = BX_k$  pour tout entier naturel  $k$ .
3. En observant les colonnes de la matrice  $B$ , montrer que le réel 1 est valeur propre de  $B^T$  et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable  $S_0$  est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix} \quad (1)$$

4. Montrer qu'alors les variables aléatoires  $S_k$  ont toutes la même loi.
5. Est-ce que  $S_0$  et  $S_1$  sont indépendantes?

## II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$  telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout  $x \in E$ ,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} u^i = \frac{1}{k} (\text{Id}_E + u + u^2 + \dots + u^{k-1})$$

où  $\text{Id}_E$  représente l'endomorphisme identité de  $E$ .

6. Soit  $x \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ . Déterminer  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x)$ .
7. Soit  $x \in \text{Im}(u - \text{Id}_E)$ . Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = 0_E$ .
8. En déduire que  $E = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E)$ .
9. Soit  $x$  un vecteur quelconque. Montrer que la suite  $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un vecteur de  $E$ , que l'on notera  $p(x)$ . Interpréter géométriquement l'application  $p : E \rightarrow E$  ainsi définie.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée  $\|\cdot\|$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  identifié à  $\mathbb{R}^n$ , telle que, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on ait  $\|AX\| \leq \|X\|$ . Pour tout  $k$  entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} A^i = \frac{1}{k} (I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) \quad (2)$$

où  $I_n$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

10. Montrer que la suite de matrices  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vers une matrice  $P$ , telle que  $P^2 = P$ .

## III Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier  $n \geq 2$ .

**Définition 1** On notera  $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.

**Définition 2** Une matrice carrée  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite **stochastique** si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \quad (3)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \quad (4)$$

Nous dirons aussi qu'une matrice ligne  $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  est stochastique lorsque ses coefficients  $\lambda_i$  sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

11. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition  $AU = U$ .
12. En déduire que l'ensemble  $\mathcal{E}$  des matrices stochastiques (carrées d'ordre  $n$ ) est stable pour le produit matriciel.
13. Montrer que cet ensemble  $\mathcal{E}$  est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On munit l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par  $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  où les  $x_i$  sont les coefficients de  $X$ .

14. Montrer que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est stochastique, alors on a  $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$  pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Dans les question 15 à 22, on note  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul  $p$  tel que  $A^p$  ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout  $k$  entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} A^i$$

15. Montrer que  $\text{Ker}(A^p - I_n)$  est de dimension 1.

*Indication : soit  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \text{Ker}(A^p - I_n)$ , soit  $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$  un indice tel que  $x_s = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$ , on montrera que  $x_j = x_s$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .*

16. En déduire que  $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}(U)$ .

17. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la matrice  $R_k$  est stochastique.

18. Montrer que la suite  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vers une matrice  $P$ , stochastique de rang 1.

19. En déduire que l'on peut écrire  $P = UL$ , où  $L = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est une matrice ligne stochastique.

20. Montrer que  $PA = P$ . En déduire que  $L$  est la seule matrice ligne stochastique vérifiant  $LA = L$ .

21. Montrer que les coefficients de la matrice ligne  $L$  sont tous strictement positifs.

22. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de  $A$ . On pourra utiliser le résultat de la question 8.

## IV Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.

On pose  $A = B^T$  où  $B$  est la matrice construite dans la partie I.

Un calcul qui n'est pas demandé montre que les coefficients de la matrice  $A^2$  sont tous strictement positifs.

23. Expliciter la limite  $P$  de la suite de matrices  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  définie en (2).

24. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble  $\llbracket 1, 5 \rrbracket$  telle que, si la variable aléatoire  $S_0$  suit cette loi, alors les variables  $S_k$  suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ).

