Corrigé : marche aléatoire dans un labyrinthe (Mines PC 2017)

I Premiers pas

1. $(S_k = i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$ est un système complet d'événements donc $\mathbb{P}(S_{k+1} = 1) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = 1 \mid S_k = i)\mathbb{P}(S_k = 1)$.

Par hypothèse, $\mathbb{P}(S_{k+1} = 1 \mid S_k = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ 1/3 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\mathbb{P}(S_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 4) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 5)$.

2. De même on établit les égalités :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1} = 2) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 5) \\
\mathbb{P}(S_{k+1} = 3) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 4) \\
\mathbb{P}(S_{k+1} = 4) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 5) \\
\mathbb{P}(S_{k+1} = 5) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 4)
\end{aligned}$$

ce qui se traduit par l'égalité matricielle $X_{k+1} = BX_k$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On observe que la somme des coefficients de chacune des colonnes de B (et donc des lignes de B^T) est égale à 1 , ce qui se traduit par l'égalité $B^TU = U$ avec

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 est valeur propre de B^T et U en est un vecteur propre.

4. On calcule $BX_0 = X_0$ donc (par récurrence immédiate) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = X_0$. Puisque X_k est la loi de S_k, toutes les S_k ont même loi.

5. On a $\mathbb{P}(S_0 = 1 \text{ et } S_1 = 1) = 0$ puisque le rat change de salle à chaque étape. Pourtant, $\mathbb{P}(S_0 = 1)\mathbb{P}(S_1 = 1) = \frac{1}{16} \neq 0$ donc les variables S_0 et S_1 ne sont pas indépendantes.

II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

6. Pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, $u(x) = x$ donc $u^k(x) = x$ et $r_k(x) = x$. On en déduit que la suite (constante) $(r_k(x))_k$ converge vers x.

7. Si $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$, il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$. Alors $u^i(x) = u^{i+1}(x) - u^i(x)$ et par télescopage, $r_k(x) = \frac{1}{k}\left(u^k(x) - x\right)$. On a $\|r_k(x)\| \leqslant \frac{\|u^k(x) - x\|}{k} \leqslant \frac{\|u^k(x)\| + \|x\|}{k} \leqslant \frac{2\|x\|}{k}$ car $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$ donc $\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.

8. Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ on a d'après les questions précédentes $\lim r_k(x) = x$ et $\lim r_k(x) = 0_E$ donc $x = 0_E$. La somme $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est donc directe, et d'après le théorème du rang égale à E.

9. Soit $x \in E$. D'après la question précédente il existe $x_1 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ tels que $x = x_1 + x_2$. D'après les questions 6 et 7 on a $\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = \lim_{k\to+\infty} r_k(x_1) + \lim_{k\to+\infty} r_k(x_2) = x_1 = p(x)$, donc p est la projection sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.

10. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{A}$. Puisqu'on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'hypothèse $\|\mathrm{AX}\| \leqslant \|\mathrm{X}\|$ se traduit par $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$. On peut donc appliquer la question précédente : r_k converge vers une projection vectorielle p de $\mathbb{R}^n$; en posant $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ ceci montre que la suite (R_k) converge vers P, matrice qui vérifie $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$ puisque $p \circ p = p$.

III Matrices stochastiques

11. Le coefficient de la i^{e} ligne de la matrice AU vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ donc la condition (4) équivaut à $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$.

12. Considérons deux matrices A et B de $\mathcal{E}$. Le coefficient de rang (i,j) de la matrice AB vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \geqslant 0$ donc AB vérifie la condition (3).
De plus, $(\mathrm{AB})\mathrm{U} = \mathrm{A}(\mathrm{BU}) = \mathrm{AU} = \mathrm{U}$ donc AB vérifie la condition (4), et ainsi AB est stochastique. $\mathcal{E}$ est bien stable par produit.

13. Soit $(\mathrm{A}^{(k)})_k$ une suite de matrices stochastiques, qui converge vers une matrice A. Alors $a_{ij} = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} a_{ij}^{(k)}$ donc $a_{ij} \geqslant 0$.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^{(k)}\mathrm{U} = \mathrm{U}$ soit en faisant tendre k vers $+\infty$: $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$. Ceci montre que A est stochastique et donc que $\mathcal{E}$ est fermé.
Considérons maintenant deux matrices stochastiques A et B, $t \in [0,1]$ et $\mathrm{M} = (1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}$.
On a $m_{ij} = (1-t)a_{ij} + tb_{ij} \geqslant 0$ et $\mathrm{MU} = (1-t)\mathrm{AU} + t\mathrm{BU} = (1-t)\mathrm{U} + t\mathrm{U} = \mathrm{U}$ donc M est stochastique, et $\mathcal{E}$ est convexe.

14. Posons $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|y_i| = \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\|\mathrm{X}\|_\infty = \|\mathrm{X}\|_\infty$ donc $\|\mathrm{Y}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{X}\|_\infty$.

15. Posons $\mathrm{B} = \mathrm{A}^p$ et suivons l'indication de l'énoncé. $\mathrm{BX} = \mathrm{X}$ donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{sj}x_j = x_s$.
Mais B est stochastique donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{sj}x_j \leqslant x_s \sum_{j=1}^{n} b_{sj} = x_s$. Cette inégalité est donc une égalité, ce qui impose d'avoir pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ l'égalité $b_{sj}x_j = b_{sj}x_s$ et, puisque $b_{sj} > 0$, $x_j = x_s$. Ceci montre que $\mathrm{X} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$ et donc que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^p - \mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$.
L'inclusion réciproque est vraie puisque B est stochastique (et donc $\mathrm{BU} = \mathrm{U}$) donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^p - \mathrm{I}_n)$ est de dimension 1 et égale à $\mathrm{Vect}(\mathrm{U})$.

16. L'implication $\mathrm{AX} = \mathrm{X} \Longrightarrow \mathrm{A}^p\mathrm{X} = \mathrm{X}$ prouve que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{A}^p - \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$. Par ailleurs, puisque A est stochastique, $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$ et $\mathrm{Vect}(\mathrm{U}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$.

17. Chacune des matrices A^i est stochastique donc les coefficients de R_k sont tous positifs ou nuls.
De plus, $\mathrm{R}_k\mathrm{U} = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{A}^i\mathrm{U} = \dfrac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{U} = \mathrm{U}$ donc R_k est stochastique.

18. Nous savons déjà (question 10) que la suite $(\mathrm{R}_k)_k$ converge vers une matrice P vérifiant $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$. Puisque $\mathcal{E}$ est fermé, on peut affirmer que $\mathrm{P} \in \mathcal{E}$, autrement dit que P est stochastique.
Enfin, nous savons que P est la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$ donc P est de rang 1.

19. Notons $\mathcal{B} = (\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Puisque P est une projection sur $\mathrm{Vect}(\mathrm{U})$, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\mathrm{PX}_i = \lambda_i\mathrm{U}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$. Ces égalités se traduisent par $\mathrm{P} = \mathrm{UL}$ où $\mathrm{L} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$.
P est stochastique donc tous ses coefficients sont positifs ou nuls ; il en est donc de même des λ_i.
De plus, $\mathrm{U} = \mathrm{PU} = \mathrm{PLU} = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\mathrm{U}$ car $\mathrm{LU} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et L est bien stochastique.

20. $\mathrm{R}_k\mathrm{A} = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{A}^{i+1} = \dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{A}^i = \dfrac{1}{k}\left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{A}^i - \mathrm{I}_n\right) = \dfrac{k+1}{k}\mathrm{R}_{k+1} - \dfrac{1}{k}\mathrm{I}_n$. En faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient l'égalité $\mathrm{PA} = \mathrm{P}$.
P est une matrice dont toutes les lignes sont égales à L ; PA est une matrice dont toutes les lignes sont égales à LA ; on en déduit que $\mathrm{LA} = \mathrm{L}$.

Réciproquement, considérons une matrice ligne stochastique K telle que $\mathrm{KA} = \mathrm{K}$.
En transposant on a $\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{K}^\mathrm{T} = \mathrm{K}^\mathrm{T}$, soit $(\mathrm{A}^\mathrm{T} - \mathrm{I}_n)\mathrm{K}^\mathrm{T} = 0$. Ainsi, $\mathrm{K}^\mathrm{T} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A}^\mathrm{T} - \mathrm{I}_n)$. Mais $(\mathrm{A}^\mathrm{T} - \mathrm{I}_n) = (\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)^\mathrm{T}$ donc $\dim\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^\mathrm{T} - \mathrm{I}_n) = 1$ et $(\mathrm{A}^\mathrm{T} - \mathrm{I}_n)\mathrm{L}^\mathrm{T} = 0$ donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^\mathrm{T} - \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{L}^\mathrm{T})$.

Il existe donc un scalaire λ tel que $K^T = \lambda L^T$ soit $K = \lambda L$, et puisque K est stochastique la somme de ces coefficients est égale à 1, ce qui impose $\lambda = 1$. La matrice L est donc unique.

21. On a $LA = L$ donc $LA^p = L$. Posons $B = A^p$; alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\lambda_j = \lambda_i$.
Si on avait $\lambda_i = 0$ on aurait $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\lambda_j = 0$ et s'agissant d'une somme de termes positifs on pourrait en déduire que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $b_{ij}\lambda_j = 0$ soit $\lambda_j = 0$ puisque $b_{ij} > 0$. On aurait ainsi $L = 0$ ce qui est absurde puisque L est stochastique. Les coefficients de L sont donc strictement positifs.

22. On a $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n)$ avec $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = 1$. De plus, ces deux sous-espaces sont stables par A donc A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & A' \end{pmatrix}$, la matrice $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ étant associée à l'endomorphisme induit $X \mapsto AX$ de $\operatorname{Im}(A - I_n)$. On a donc $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)\chi_{A'}(\lambda)$. Mais si 1 était valeur propre de A' le noyau de $A - I_n$ serait au moins de dimension 2, ce qui ne ce peut. On en déduit que 1 est valeur propre simple de A.

IV Application au labyrinthe

23. Nous savons que $P = UL$ où L est l'unique matrice-ligne stochastique qui vérifie $LA = L$, soit $BL^T = L^T$.
Or nous avons vu à la question 4 que le vecteur X_0 vérifie $BX_0 = X_0$; de plus il est facile de constater que X^T est stochastique donc $L = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \end{pmatrix}$ et $P = UL = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

24. S'il existe une telle loi, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $S_k = S_0$ et en particulier $S_1 = S_0$ soit $BS_0 = S_0$, ou encore $S_0^T A = S_0^T$.
Mais S_0^T est stochastique donc d'après la question 20, $S_0^T = L$.
Réciproquement, la question 4 a montré que pour $S_0 = L^T$ toutes les variables S_k vérifient la même loi de probabilité, ce qui permet de conclure.