Retour à l'origine d'une marche aléatoire (Mines PC 2016)

Durée : libre

I Préliminaire

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} x^k$.

II Identité de Karamata

On considère dans cette partie une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout réel $x \in]-1,1[$, la série de terme général $a_k x^k$ converge absolument. Pour tout réel $x \in]-1,1[$, on note $f(x)$ la somme de cette série et l'on suppose que

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\, f(x) = \sqrt{\pi}.$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}$.

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. En déduire l'égalité :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

4. Montrer que pour toute application polynomiale réelle Q, on a

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \mathrm{Q}(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{-t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Soit h la fonction définie, pour tout $x \in [0,1]$, par : $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \mathrm{e}^{-1}[\\ 1/x & \text{si } x \in [\mathrm{e}^{-1}, 1]. \end{cases}$

5. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} h(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$ et donner sa valeur.

6. Soit $x \in [0,1[$. Justifier la convergence de la série de terme général $a_k x^k h(x^k)$.

On admet l'égalité (dite de Karamata) : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k h(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\,h(\mathrm{e}^{-t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

7. En utilisant ce résultat pour $x = \mathrm{e}^{-1/n}$, en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

III Théorème taubérien

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de réels positifs et, pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. On fait l'hypothèse que $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. On va montrer qu'alors $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x.

8. Soit α,β un couple de nombres réels vérifiant : $0<\alpha<1<\beta$. Pour tout entier naturel n tel que $n-[\alpha n]$ et $n-[\beta n]$ soient non nuls, justifier l'encadrement

$$\frac{S_{[\beta n]}-S_n}{[\beta n]-n} \leqslant a_n \leqslant \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n-[\alpha n]}.$$

9. Soit γ un réel strictement positif. Déterminer les limites des suites de termes généraux $\dfrac{n}{[\gamma n]}$ et $\dfrac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}}$.

10. Soit ϵ un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel n assez grand, on a :

$$\frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1}-\epsilon \leqslant \sqrt{n}a_n \leqslant \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}+\epsilon.$$

11. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}a_n = 1$.

IV Marche aléatoire

On considère $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On définit les applications coordonnées, pour tout $i \geqslant 1$, $X_i : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \omega=(\omega_1,\omega_2,\dots) & \longmapsto & \omega_i \end{pmatrix}$.
On admet que l'on peut construire une tribu $\mathcal{B}$ et une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω, de sorte que les X_i soient des variables aléatoires, indépendantes et de même loi donnée par

$$\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=\frac{1}{2}.$$

On définit la suite de variables aléatoires $(S_n, n\geqslant 0)$ par

$$S_0(\omega)=0, \quad S_n(\omega)=\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega).$$

On définit enfin la variable aléatoire T par

$$T : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \overline{\mathbb{N}^*}=\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} +\infty & \text{si } S_n(\omega)\neq 0,\ \forall n\geqslant 1 \\ \inf\left\{n\geqslant 1 \;\middle|\; S_n(\omega)=0\right\} & \text{s'il existe } n\geqslant 1 \text{ tel que } S_n(\omega)=0. \end{cases} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n, on note $E_n=\left\{T>n\right\}$, pour $n\geqslant 1$, $A_n^n=\left\{S_n=0\right\}$ et pour $k\in\{0,\dots,n-1\}$, $A_k^n=\left\{S_k=0\right\}\cap\bigcap_{i=k+1}^{n}\left\{S_i\neq 0\right\}$.

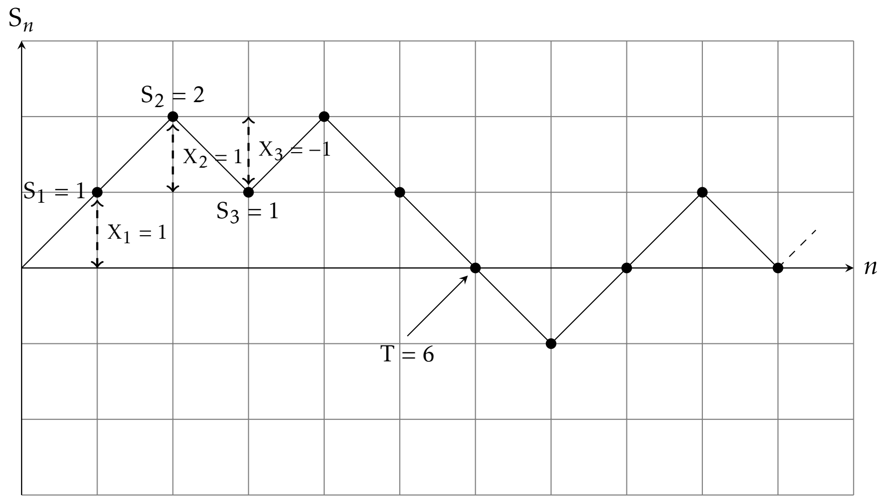

FIGURE 1 – Ici ω commence par $(1,1,-1,1,-1,-1,-1,1,1,-1)$. ω appartient à A_6^6 et A_8^8 ainsi qu'à A_0^1, A_0^2, …,A_0^5, A_6^7 etc.

12. Montrer pour tout $1 \leqslant k < n$, pour tout $(i_1, \dots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k}).$$

13. Montrer pour tout $1 \leqslant k < n$, pour tout $(j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$ que

$$\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k}).$$

Indication : on pourra considérer l'application

$$\theta : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{n-k} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{n-k} \\ (z_1, \dots, z_{n-k}) & \longmapsto & \left(z_1, z_1 + z_2, \dots, \sum_{j=1}^{n-k} z_j\right) \end{array} \right).$$

14. En déduire que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$.

15. Montrer l'égalité $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$.

16. Pour tout réel x de $]0, 1[$, établir l'égalité :

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n\right).$$

17. Pour tout entier naturel n, calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$. *Indication : on discutera suivant la parité de n.*

18. En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

19. À l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes déterminer, quand l'entier naturel n tend vers l'infini, un équivalent de $\mathbb{P}(E_n)$.

20. Montrer que l'on a : $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.

21. Pour tout réel $x \in [0, 1]$, prouver l'égalité : $1 - \sqrt{1 - x^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n$.

22. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = 2n) = \dfrac{1}{2n-1}\dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{4^n}$.

♦ ♦
♦