Corrigé : retour à l'origine d'une marche aléatoire (Mines PC 2016)

I Préliminaire

1. pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ donc en particulier pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-k+1)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1)(3)\cdots(2k-1)}{2^k k!}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}x^k.$$

II Identité de Karamata

2. $\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \sqrt{1-x}f(x^{p+1}) = \sqrt{\frac{1-x}{1-x^{p+1}}} \times \sqrt{1-x^{p+1}}f(x^{p+1})$.

On a $\frac{1-x^{p+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{p} x^k$ donc $\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^{p+1}}{1-x} = p+1$ et ainsi $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}$.

3. Au voisinage de 0, $\frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
Au voisinage de $+\infty$, $\frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \underset{0}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t})$ et $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi, $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, et le changement de variable $u = (p+1)t$ conduit à

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.$$

Compte tenu de la question précédente, il en résulte que $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

4. Posons $\mathrm{Q} = \sum_{p=0}^{n} b_p \mathrm{X}^p$. Alors $\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \mathrm{Q}(x^k) = \sum_{p=0}^{n} b_p \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}$ (somme finie de séries convergentes) et d'après ce qui précède, $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \mathrm{Q}(x^k) = \sum_{p=0}^{n} b_p \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{-t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

5. La fonction $t \mapsto h(\mathrm{e}^{-t})$ est nulle sur $]1,+\infty[$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}h(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2$ donc $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}h(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 2.

6. Si $x \in [0,1[$ il existe un rang à partir duquel $x^k < \mathrm{e}^{-1}$ donc la suite $a_k x^k h(x^k)$ est nulle à partir d'un certain rang, en conséquence de quoi la série $\sum a_k x^k h(x^k)$ converge.

7. On substitue $\mathrm{e}^{-1/n}$ à x dans l'égalité de Karamata et on utilise la question 5 : $\lim_{+\infty}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1/n}}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,\mathrm{e}^{-k/n}\,h(e^{-\mathrm{K}/n}) = 2$.

On a $\mathrm{e}^{-k/n}\,h(e^{-k/n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ 1 & \text{si } k \leqslant n\end{cases}$ donc $\lim_{+\infty}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1/n}}\sum_{k=0}^{n} a_k = 2$, soit $\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \frac{2}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1/n}}} \sim 2\sqrt{n}$ car $1-\mathrm{e}^{-1/n} \sim \frac{1}{n}$.

III Théorème taubérien

8. On a $n < [\beta n]$ donc $S_{[\beta n]} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{[\beta n]} a_k \leqslant ([\beta n] - n)a_n$ car la suite (a_n) décroit.

On a $[\alpha n] < n$ donc $S_n - S_{[\alpha n]} = \displaystyle\sum_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_k \geqslant (n - [\alpha n])a_n$ car la suite (a_n) décroit.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma n - 1 < [\gamma n] \leqslant \gamma n$ donc $\gamma - \dfrac{1}{n} < \dfrac{[\gamma n]}{n} \leqslant \gamma$. On en déduit par encadrement que $\lim \dfrac{n}{[\gamma n]} = \dfrac{1}{\gamma}$.

Par ailleurs, puisque $\lim [\gamma n] = +\infty$ nous avons $\lim \dfrac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{[\gamma n]}} = 2$ (car $S_n \sim 2\sqrt{n}$).

Ainsi, $\lim \dfrac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} = \lim \dfrac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{[\gamma n]}} \sqrt{\dfrac{[\gamma n]}{n}} = 2\sqrt{\gamma}$.

10. D'après la question 8, $\dfrac{\sqrt{\frac{[\beta n]}{n}} \frac{S[\beta n]}{\sqrt{[\beta n]}} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}}{\frac{[\beta n]}{n} - 1} \leqslant \sqrt{n} a_n \leqslant \dfrac{\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{[\alpha n]}{n}} \frac{S[\alpha n]}{\sqrt{[\alpha n]}}}{1 - \frac{[\alpha n]}{n}}$.

D'après la question 9, le minorant de cette expression tend vers $\dfrac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1}$ et le majorant vers $\dfrac{2(\sqrt{\alpha} - 1)}{\alpha - 1}$ donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang à partir duquel $\dfrac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \epsilon \leqslant \sqrt{n} a_n \leqslant \dfrac{2(\sqrt{\alpha} - 1)}{\alpha - 1} + \epsilon$.

11. Nous avons ainsi $\dfrac{2}{\sqrt{\beta} + 1} - \epsilon \leqslant \sqrt{n} a_n \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{\alpha} + 1} + \epsilon$. Or il est toujours possible de choisir $\alpha < 1 < \beta$ de telle sorte que $\dfrac{2}{\sqrt{\beta} + 1} \geqslant 1 - \epsilon$ et $\dfrac{2}{\sqrt{\alpha} + 1} \leqslant 1 + \epsilon$ car $\displaystyle\lim_{t \to 1} \dfrac{2}{\sqrt{t} + 1} = 1$. Pour de tels choix de α et β nous avons montré l'existence d'un rang à partir duquel $1 - 2\epsilon \leqslant \sqrt{n} a_n \leqslant 1 + 2\epsilon$, ce qui prouve que $\lim \sqrt{n} a_n = 1$.

IV Marche aléatoire

Il s'agit ici de modéliser une marche aléatoire bi-directionnelle discrète : à chaque étape i le marcheur se déplace d'un pas vers le nord ($X_i = 1$) ou vers le sud ($X_i = -1$) de façon équiprobable. La variable aléatoire S_n décrit la position du marcheur à la date n, la variable aléatoire T la date du premier retour à l'origine, s'il existe. E_n est l'événement « à la date n le marcheur n'est encore jamais revenu à sa position initiale », A_n^n l'événement « à la date n le marcheur est revenu à sa position initiale » et A_n^k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ l'événement « k est la dernière date de l'intervalle $[\![k, n]\!]$ à laquelle le marcheur est revenu à sa position initiale ».

12. Les événements $X_1, \dots, X_n$ étant deux-à-deux indépendants,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = \prod_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}(X_{k+j} = i_j) = \frac{1}{2^{n-k}} = \prod_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}(X_j = i_j) = \mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k}).$$

13. On dispose des équivalences :

$$\begin{cases} S_{k+1} - S_k = j_1 \\ S_{k+2} - S_k = j_2 \\ \quad\cdots \\ S_n - S_k = j_{n-k} \end{cases} \iff \begin{cases} X_{k+1} = j_1 \\ X_{k+1} + X_{k+2} = j_2 \\ \quad\cdots \\ X_{k+1} + \cdots + X_n = j_{n-k} \end{cases} \iff \begin{cases} X_{k+1} = j_1 \\ X_{k+2} = j_2 - j_1 \\ \quad\cdots \\ X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1} \end{cases}$$

donc $\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(X_{k+1} = j_1, X_{k+2} = j_2 - j_1, \dots, X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1}) = \mathbb{P}(X_1 = j_1, X_2 = j_2 - j_1, \dots, X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1})$ d'après la question précédente.
Il reste à observer que

$$\begin{cases} X_1 = j_1 \\ X_2 = j_2 - j_1 \\ \quad\cdots \\ X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1} \end{cases} \iff \begin{cases} S_1 = j_1 \\ S_2 = j_2 \\ \quad\cdots \\ S_{n-k} = j_{n-k} \end{cases}$$

pour conclure : $\mathbb{P}(S_{k+1}-S_k=j_1,\dots,S_n-S_k=j_{n-k})=\mathbb{P}(S_1=j_1,\dots,S_{n-k}=j_{n-k})$.

14. $\mathbb{P}(E_0)=1$ donc si $k=n$, $\mathbb{P}(A_n^n)=\mathbb{P}(S_n=0)\mathbb{P}(E_0)$.
Si $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\mathbb{P}(A_k^n)=\mathbb{P}(S_k=0)\times\mathbb{P}(S_{k+1}\neq 0,\cdots,S_n\neq 0\mid S_k=0)=\mathbb{P}(S_k=0)\times\mathbb{P}(S_{k+1}-S_k\neq 0,\dots,S_n-S_k\neq 0\mid S_k=0)$.
Observons maintenant que S_k ne dépend que des variables $X_1,\dots,X_k$ alors que pour tout $p\in[\![k+1,n]\!]$, S_p-S_k ne dépend que des variables $X_{k+1},\dots,X_n$. D'après le lemme des coalitions l'événement S_k est donc indépendant des événements S_p-S_k, $p\in[\![k+1,n]\!]$ et ainsi $\mathbb{P}(A_k^n)=\mathbb{P}(S_k=0)\times\mathbb{P}(S_{k+1}-S_k\neq 0,\dots,S_n-S_k\neq 0)$.

On a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{k+1}-S_k\neq 0,\dots,S_n-S_k\neq 0)&=\mathbb{P}\Bigl(\bigcup_{j_1\neq 0,\cdots,j_{n-k}\neq 0}\bigl\{S_{k+1}-S_k=j_1,\cdots,S_n-S_k=j_{n-k}\bigr\}\Bigr)\\&=\sum_{j_1\neq 0,\cdots,j_{n-k}\neq 0}\mathbb{P}(S_{k+1}-S_k=j_1,\cdots,S_n-S_k=j_{n-k})\end{aligned}$$
car ces événements sont deux-à-deux incompatibles.
D'après la question 13, $\mathbb{P}(S_{k+1}-S_k\neq 0,\dots,S_n-S_k\neq 0)=\sum\limits_{j_1\neq 0,\cdots,j_{n-k}\neq 0}\mathbb{P}(S_1=j_1,\dots,S_{n-k}=j_{n-k})=\mathbb{P}(S_1\neq 0,\dots,S_{n-k}\neq 0)$ donc $\mathbb{P}(A_k^n)=\mathbb{P}(S_k=0)\times\mathbb{P}(S_1\neq 0,\dots,S_{n-k}\neq 0)=\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k})$.

15. Si $n=0$ l'égalité demandée est triviale puisque $\mathbb{P}(S_0=0)=1$ et $\mathbb{P}(E_0)=1$. On suppose désormais $n\geqslant 1$.
Soit $\omega\in\Omega$. S'il existe $k\in[\![1,n]\!]$ tel que $S_k(\omega)=0$ alors, en considérant le plus grand de ces entiers k on a $\omega\in A_k^n$. Et s'il n'existe pas un tel entier k alors $\omega\in A_0^n$. Ainsi, $\Omega=\bigcup\limits_{k=0}^{n}A_k^n$.
Par ailleurs, on a $k\neq k'\Longrightarrow A_k^n\cap A_{k'}^n=\varnothing$ donc on est en présence d'un système complet d'événements, et ainsi :
$$1=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(A_k^n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k}).$$

16. Les deux séries entières ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 donc on peut réaliser un produit de Cauchy :
$$\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=0)x^n\Bigr)\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n\Bigr)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\qquad\text{avec}\quad a_n=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k})$$
D'après ce qui précède, $\Bigl(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=0)x^n\Bigr)\Bigl(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n\Bigr)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$.

17. $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ a même parité que n donc si n est impair, $\mathbb{P}(S_n=0)=0$.
Si $n=2p$ est pair, $\mathbb{P}(S_n=0)$ est égale à la probabilité de tirer p fois la valeur 1 et p fois la valeur -1 en $2p$ tirages soit $\mathbb{P}(S_n=0)=\dfrac{1}{2^{2p}}\dbinom{2p}{p}$.

18. On a donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=0)x^n=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{4^p}\dbinom{2p}{p}x^{2p}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ d'après le préliminaire, et d'après la question 16,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

19. Posons $a_n=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\mathbb{P}(E_n)$ et $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_nx^n=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. On a $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}f(x)=\sqrt{\pi}$ donc d'après l'identité de Karamata, $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\sim 2\sqrt{n}$ et d'après le théorème taubérien, $a_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui montre que $\mathbb{P}(E_n)\sim\sqrt{\dfrac{2}{n\pi}}$.

20. On a $\bigl\{T=+\infty\bigr\}=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n$ et $E_{n+1}\subset E_n$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $\mathbb{P}(T=+\infty)=\lim\mathbb{P}(E_n)=0$.

21. On a $\{T = n\} = \{T > n-1\} \cap \{T \leqslant n\} = \{T > n-1\} \cap \overline{\{T > n\}} = E_{n-1} \cap \overline{E_n} = E_{n-1} \setminus E_n$.
Or $E_n \subset E_{n-1}$ donc $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(E_{n-1}) - \mathbb{P}(E_n)$. On en déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{n-1})x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = x\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = (x-1)\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n + \mathbb{P}(E_0)$$

ce qui, d'après la question 18, donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n = (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 = 1 - \sqrt{1-x^2}$.

22. Pour tout $x \in]-1,1[$, nous avons

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{n!}(-x^2)^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)(1/2)(3/2)\cdots((2n-3)/2)}{n!}x^{2n}$$

donc $\displaystyle 1 - \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}n!}x^{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!n!}x^{2n}$.
Par unicité du développement en série entière nous avons donc $\displaystyle\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{(2n-2)!}{2.4^{n-1}(n-1)!n!} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$.