Étude d'une intégrale (Mines MP 2004)

Durée : libre

L'objet de ce problème est principalement l'étude et le calcul de l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty} \frac{\arctan t}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1}\,\mathrm{d}t.$$

Première partie

Le but de cette partie est d'établir une expression de l'intégrale I et d'étudier la fonction φ définie par la relation suivante :

$$\varphi(t) = \frac{\arctan t}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1}.$$

Variations de la fonction φ

1. Déterminer un éventuel prolongement par continuité de la fonction φ en 0.

2. Étudier les variations de la fonction φ sur la demi-droite ouverte $\mathrm{D} =]0, \infty[$; il peut être intéressant d'introduire la fonction auxiliaire ψ définie par la relation suivante :

$$\psi(t) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\pi t}}{1 + t^2} - \pi \arctan t.$$

En déduire la borne supérieure de la fonction φ sur D.

Existence et expressions de l'intégrale I

3. Justifier l'existence de l'intégrale I définie par la relation suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty} \frac{\arctan t}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1}\,\mathrm{d}t.$$

4. Démontrer les deux relations suivantes :

$$\mathrm{I} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-k\pi t} \arctan t\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{I} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-k\pi t}}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Deuxième partie

Le but de cette partie est d'introduire une fonction f de façon à transformer les expressions obtenues précédemment pour l'intégrale I et à pouvoir calculer l'intégrale I. Soit f la fonction définie par la relation suivante :

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Propriétés de la fonction f

5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f. Préciser l'ensemble dans lequel la fonction f est continue ; quelle est sa limite lorsque le réel x tend vers l'infini ?

6. Dans quel ensemble est-elle deux fois continûment dérivable ? Établir une relation simple entre la fonction f et sa dérivée seconde f'' sur la demi-droite ouverte $\mathrm{D} =]0, \infty[$.

Deux intégrales

Soit a un réel strictement positif ($a > 0$). Étant donné un réel X supérieur ou égal à a ($\mathrm{X} \geqslant a$), soient S(X) et C(X) les deux intégrales suivantes :

$$\mathrm{S}(\mathrm{X}) = \int_a^{\mathrm{X}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{C}(\mathrm{X}) = \int_a^{\mathrm{X}} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

7. Existe-t-il une limite à chacune des expressions S(X) et C(X) lorsque le réel X croît vers l'infini ?

Soient g et h les deux fonctions définies sur la demi-droite ouverte D par les relations suivantes :

$$g(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{X\to\infty} \int_x^{X} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad h(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{X\to\infty} \int_x^{X} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Une expression de la fonction f

8. Montrer que la fonction $\theta : x \mapsto g(x)\cos x - h(x)\sin x$ est solution particulière sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$, et en déduire l'expression de la solution générale de cette équation.

9. En déduire les deux expressions ci-dessous de la fonction f :

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u+x}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Troisième partie

Un résultat intermédiaire

10. En utilisant les résultats établis dans les première et deuxième parties, démontrer la relation suivante :

$$\mathrm{I} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(ku)}{\pi+u}\,\mathrm{d}u.$$

11. Démontrer le résultat suivant :

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{(u+\pi)^2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nu)}{n^2}\Big)\mathrm{d}u$$

Somme de la série de terme général $\dfrac{\cos(nu)}{n^2}$

Soit G la fonction 2π-périodique dont la restriction au segemnt $[0, 2\pi]$ est définie par la relation suivante :

$$\mathrm{G}(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$$

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2} = \mathrm{G}(x)$.

12. En déduire la valeur de la somme $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Valeur de l'intégrale I

Soit a_k le réel défini par l'intégrale suivante :

$$a_k = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{1}{(u+\pi)^2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nu)}{n^2}\Big)\mathrm{d}u$$

13. Calculer, pour tout entier naturel k, la valeur du réel a_k.

Soit N un entier strictement positif. Soit I_n le réel défini par la relation ci-dessous :

$$\mathrm{I}_N = \sum_{n=0}^{N-1}\Big(-1 + (n+1)\ln\Big(\frac{2n+3}{2n+1}\Big)\Big)$$

14. Démontrer que la valeur de l'intégrale I est égale à la limite de la suite (I_N) :

$$\mathrm{I} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \mathrm{I}_\mathrm{N}$$

En déduire que l'intégrale I est la somme d'une série convergente.

15. Après avoir montré que l'expression $\mathrm{E}_\mathrm{N} = \exp(\mathrm{I}_\mathrm{N})$ est égale à un produit de facteurs, déterminer la valeur de l'intégrale I.

Soit J l'intégrale suivante :

$$\mathrm{J} = \int_0^\infty \frac{\arctan t}{\mathrm{e}^{2\pi t} - 1}\,\mathrm{d}t$$

Il est facile de calculer l'intégrale J par la même méthode que celle qui a servi pour calculer l'intégrale I ; il vient :

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln(2\pi)}{2}\right)$$

Soit K l'intégrale suivante :

$$\mathrm{K} = \int_0^\infty \frac{\arctan t}{\mathrm{e}^{\pi t} + 1}\,\mathrm{d}t$$

16. Calculer l'intégrale K définie ci-dessus, en utilisant le résultat obtenu pour l'intégrale I est la valeur admise pour l'intégrale J.