Corrigé : étude d'une intégrale (Mines MP 2004)

Première partie

Variations de la fonction φ

1. Au voisinage de 0, $\arctan t \underset{0}{\sim} t$ et $e^{\pi t} - 1 \underset{0}{\sim} \pi t$ donc φ est prolongeable par continuité en posant $\varphi(0) = \dfrac{1}{\pi}$.

2. φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\varphi'(t) = \dfrac{e^{\pi t}}{(e^{\pi t} - 1)^2}\Big(\dfrac{1 - e^{-\pi t}}{1 + t^2} - \pi \arctan t\Big) = \dfrac{e^{\pi t}}{(e^{\pi t} - 1)^2}\psi(t)$.

ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\psi'(t) = -\dfrac{1 - e^{-\pi t}}{(1 + t^2)^2}\big(\pi t^2 + 2t + \pi\big) \leqslant 0$. ψ est donc décroissante sur cet intervalle, et puisque $\psi(0) = 0$, négative sur ce même intervalle.
On en déduit que la fonction φ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Sachant de plus que $\lim\limits_{+\infty} \varphi(t) = 0$, on en déduit $\|\varphi\|_\infty = \varphi(0) = \dfrac{1}{\pi}$.

Existence et expressions de l'intégrale I

3. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ est faussement impropre puisque φ est prolongeable par continuité en 0.

Au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2} e^{-\pi t}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\pi t}\,dt$ converge donc il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$.
De ceci il résulte que l'intégrale I est bien convergente.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ posons $f_k(t) = e^{-k\pi t}\arctan t$. La série $\sum f_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme est égale à φ car $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k\pi t} = \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} = \frac{1}{e^{\pi t} - 1}$.
Par ailleurs, ces fonctions f_k sont intégrables sur $[0, +\infty[$ car $f_k(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-k\pi t})$ et :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \Big(\varphi(t) - \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\Big)dt = \int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt \qquad \text{avec } R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$$

La suite (R_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$ et $\big|R_n(t)\big| = \Big|\arctan t \dfrac{e^{-(n+1)\pi t}}{1 - e^{-\pi t}}\Big| = \big|\varphi(t)\big| e^{-(n+1)\pi t} \leqslant \dfrac{1}{\pi} e^{-\pi t}$.
La fonction $t \mapsto e^{-\pi t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ donc le théorème de convergence dominée s'applique : $\lim \displaystyle\int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt = 0$, ce qui se traduit par : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-k\pi t}\arctan t\,dt$.

Réalisons maintenant une intégration par parties suivant le schéma : $\begin{array}{c|cc|} + & \arctan t & e^{-k\pi t} \\ - & \dfrac{1}{1+t^2} & \dfrac{-1}{k\pi} e^{-k\pi t} \end{array}$.

On a $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{k\pi} e^{-k\pi t} \arctan t = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{k\pi} e^{-k\pi t} \arctan t = 0$ donc cette intégration par parties ne change pas la nature de l'intégrale et donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-k\pi t} \arctan t\,dt = \frac{1}{k\pi}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}\,dt$. Ainsi, $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}\,dt$.

Deuxième partie

Propriétés de la fonction f

5. Notons $g : (x, t) \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$. Lorsque $x \geqslant 0$ on a $g(x,t) \underset{t \to +\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge donc $f(x)$ est définie pour $x \geqslant 0$.

Lorsque $x<0$ on a $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\big(g(x,t)\big)$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc $f(x)$ n'est pas définie pour $x<0$. On en déduit que la fonction f n'est définie que sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
Pour tout $x\geqslant 0$, $\big|g(x,t)\big| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ et la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, f est continue sur $[0,+\infty[$.
Cette même hypothèse de domination permet l'interversion de la limite et de l'intégrale : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t = 0$.

6. On calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t^2\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$.
Soit $\alpha>0$. Pour tout $x\geqslant\alpha$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car $\dfrac{t\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-xt})$, et $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}$.
La fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc le théorème de dérivation s'applique : la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[\alpha,+\infty[$, puis sur $]0,+\infty[$ par recouvrement, et $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
On a donc pour tout $x>0$, $f(x)+f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.

Deux intégrales

7. On intègre par parties suivant le schéma : $\left|\begin{array}{c|cc} + & \dfrac{1}{t} & \sin t \\ - & -\dfrac{1}{t^2} & -\cos t \end{array}\right|$ pour obtenir $\mathrm{S}(\mathrm{X}) = \dfrac{\cos a}{a} - \dfrac{\cos \mathrm{X}}{\mathrm{X}} - \displaystyle\int_a^{\mathrm{X}} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $t\mapsto\dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ car $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donc $\displaystyle\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \mathrm{S}(\mathrm{X}) = \frac{\cos a}{a} - \int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
On montre par un raisonnement analogue que $\displaystyle\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \mathrm{C}(\mathrm{X}) = -\frac{\sin a}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Une expression de la fonction f

8. D'après le théorème fondamental de l'analyse les fonctions g et h sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et $g'(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$, $h'(x) = -\dfrac{\cos x}{x}$, donc θ est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$, et $\theta'(x) = -g(x)\sin x - \dfrac{\sin x\cos x}{x} - h(x)\cos x + \dfrac{\cos x \sin x}{x} = -g(x)\sin x - h(x)\cos x$.
Pour les mêmes raisons, θ est de classe $\mathscr{C}^2$ et $\theta''(x) = -g(x)\cos x + \dfrac{\sin^2 x}{x} + h(x)\sin x + \dfrac{\cos^2 x}{x} = -\theta(x) + \dfrac{1}{x}$ donc θ est solution particulière de $y''+y = \dfrac{1}{x}$.
Ainsi, $y''+y = \dfrac{1}{2}x \iff y''+y = \theta''+\theta \iff (y-\theta)''+(y-\theta) = 0$ donc il existe $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $x>0$, $y(x)-\theta(x) = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$.

9. Comme la fonction f est elle-même solution de cette équation différentielle, il existe A et B dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $x>0$, $f(x) = \theta(x) + \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$.
Notons que $\lim\limits_{+\infty}(x) = \lim\limits_{+\infty} h(x) = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty}\theta(x) = 0$. Mais on a aussi (question 5) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x = 0$.
En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}\cos(2n\pi) + \mathrm{B}\sin(2n\pi) = 0$ donc $\mathrm{A}=0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}\cos\Big(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\Big) + \mathrm{B}\sin\Big(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\Big) = 0$ donc $\mathrm{B}=0$.
Ainsi, $f(x) = \theta(x) = \cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}\,\mathrm{d}u$ (en posant $u=t-x$).
Enfin, le changement de variable $u=tx$ fournit finalement l'expression $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Troisième partie

Un résultat intermédiaire

10. La première partie a montré que $\mathrm{I} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} f(k\pi)$ et la seconde partie que $f(k\pi) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(k\pi t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ku)}{\pi+u}\,\mathrm{d}u$ en posant $u = \pi t$. Ainsi, $\mathrm{I} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ku)}{\pi+u}\,\mathrm{d}u$.

11. Réalisons une intégration par parties suivant le schéma : $\left|\begin{array}{c|cc} + & \dfrac{1}{\pi+u} & \sin(ku) \\ - & -\dfrac{1}{(\pi+u)^2} & -\dfrac{1}{k}\cos(ku) \end{array}\right|$. Sachant que $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\cos(ku)}{\pi+u} = 0$ il vient : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ku)}{\pi+u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\infty} \frac{\cos(ku)}{(\pi+u)^2}\,\mathrm{d}u$ puis, sachant que la somme $\sum \frac{1}{k^2}$ converge,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos(ku)}{(\pi+u)^2}\,\mathrm{d}u$$

Justifions maintenant l'interversion de la somme et de l'intégrale. Pour cela, notons $f_k(u) = \frac{1}{k^2}\frac{\cos(ku)}{(\pi+u)^2}$. La série $\sum f_k$ converge simplement car $f_k(x) \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$. De plus, $\int_0^{\infty} \left|f_k(u)\right|\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{k^2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(\pi+u)^2} = \frac{1}{\pi^2 k^2}$ donc la série $\sum \int_0^{\infty} \left|f_k(u)\right|\mathrm{d}u$ converge. On peut donc appliquer le théorème d'interversion somme/intégrale, qui donne :

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ku)}{k^2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{(\pi+u)^2}$$

Somme de la série de terme général $\frac{\cos(nu)}{n^2}$

12. En posant $x = 0$ on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \mathrm{G}(0) = \frac{\pi^2}{6}$.

Valeur de l'intégrale I

13. La fonction G est 2π-périodique donc le changement de variable $t = u - 2k\pi$ donne :

$$a_k = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{G}(t+2k\pi)}{(t+(2k+1)\pi)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{G}(t)}{(t+(2k+1)\pi)^2}\,\mathrm{d}t$$

Pour calculer cette intégrale on réalise trois intégrations par parties successives suivant le schéma :

$$\left|\begin{array}{c|cc} + & \mathrm{G}(t) & \dfrac{1}{(t+(2k+1)\pi)^2} \\ - & \mathrm{G}'(t) & \dfrac{-1}{t+(2k+1)\pi} \\ + & \mathrm{G}''(t) & -\ln(t+(2k+1)\pi) \\ - & 0 & -(t+(2k+1)\pi)\ln(t+(2k+1)\pi)+t \end{array}\right| \quad \text{avec } \mathrm{G}(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{\pi t}{2} + \frac{\pi^2}{6},\ \mathrm{G}'(t) = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{2},\ \mathrm{G}''(t) = \frac{1}{2},\ \mathrm{G}^{(3)}(t) = 0$$

Ceci conduit à : $a_k = \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) + (k+1)\pi\Big(\ln(2k+1)\pi - \ln(2k+3)\pi\Big) + \pi$.

14. D'après la question 11 et la relation de Chasles nous avons $\mathrm{I} = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Or $\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} a_n = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2\mathrm{N}+1}\right) + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\left(1 + (n+1)\ln\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)\right)$ donc $\mathrm{I} = \lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\frac{1}{6(2\mathrm{N}+1)} + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\left((n+1)\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) - 1\right)\right) = \lim \mathrm{I}_\mathrm{N}$.

Autrement dit, $\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) - 1\right)$.

15. $E_N = e^{-N}\prod_{n=0}^{N-1}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} = e^{-N}\frac{\prod_{n=1}^{N}(2n+1)^n}{\prod_{n=0}^{N-1}(2n+1)^{n+1}}$ (en ré-indexant le numérateur) donc $E_N = \frac{e^{-N}(2N+1)^N}{\prod_{n=1}^{N-1}(2n+1)}$.

On a donc $E_N = \frac{e^{-N}(2N+1)^N 2^N N!}{(2N)!}$. La formule de Stirling permet d'obtenir l'équivalent $E_N \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2N+1}{2N}\right)^N$. Or $\left(\frac{2N+1}{2N}\right)^N = \exp\left(N\ln\left(1+\frac{1}{2N}\right)\right)$ donc $\lim E_N = \sqrt{\frac{e}{2}}$ et donc $I = \lim I_N = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\ln 2\right)$.

16. On a $\frac{\arctan t}{e^{\pi t}+1} \underset{+\infty}{=} O(e^{-\pi t})$, ce qui assure la convergence de l'intégrale K.

De l'égalité $\frac{1}{e^{\pi t}-1} - \frac{1}{e^{\pi t}+1} = \frac{2}{e^{2\pi t}-1}$ on tire $I - K = 2J$, et donc $K = I - 2J = \frac{1}{2}\left(\ln\pi - 1\right)$.