# Corrigé : réduction des applications semi-linéaires (Mines PSI 2001)

## Partie I.

### Premières propriétés

**Question 1.** Supposons l'existence de deux complexes $\lambda$ et $\mu$ tels que $u(x) = \lambda x$ et $u(x) = \mu x$. Alors $(\mu - \lambda)x = 0$, et sachant que x est non nul, $\mu = \lambda$.

**Question 2.** Si x est un vecteur co-propre de u associé à $\mu$ et $\alpha$ un réel alors :

$$u(e^{i\alpha}x) = e^{-i\alpha}u(x) = e^{-i\alpha}\mu x = (\mu e^{-2i\alpha})e^{i\alpha}x$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = -\dfrac{\theta}{2}$ et $y = e^{-i\frac{\theta}{2}}x$ (qui est bien non nul) pour avoir : $u(y) = \mu e^{i\theta}y$ ; $y$ est donc un vecteur co-propre de $u$ pour la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$.

**Remarque**. Cette propriété prouve donc que dès qu'une application semi-linéaire $u$ admet une valeur co-propre non nulle, elle en admet une infinité (de même module) dont en particulier une réelle positive (en prenant $\theta = -\arg(\mu)$). De plus, il suffit de connaitre les valeurs co-propres réelles positives pour les avoir toutes : le « co-spectre » de $u$ sera la réunion dans le plan complexe des cercles centrés en 0 et de rayon les valeurs co-propres réelles positives. La notion d'éléments co-propres d'une application semi-linéaire est donc sensiblement différente, malgré la définition, de la notion d'éléments propres d'une application linéaire.

**Question 3.** Notons déjà que $0 \in E_\mu$ et que pour tout $(x, y) \in E\mu^2$, $u(x+y) = u(x)+u(y) = \mu(x+y)$ donc $x+y \in E_\mu$.
Il reste à étudier la stabilité pour la loi externe. Soit $x$ un vecteur non nul de $E_\mu$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors :

$$ax \in E_\mu \iff u(ax) = \mu ax \iff \overline{a}\mu x = \mu ax \iff \overline{a} = a \text{ ou } \mu = 0.$$

On en déduit immédiatement que $E_\mu$ est toujours un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (car $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{a} = a$), et qu'il n'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ que lorsque $\mu = 0$.

**Question 4.** Pour tout $(x, y) \in E^2$ et $a \in \mathbb{C}$, $u \circ v(ax + y) = u\big(\overline{a}v(x) + v(y)\big) = au \circ v(x) + u \circ v(y)$, donc l'application $u \circ v$ est linéaire.

### Matrice associée à une application semi-linéaire

**Question 5.** Nous avons $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ donc $u(x) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j u(e_j)$. Notons $C_j$ la matrice associée au vecteur $u(e_j)$ pour la base $(e)$, puis $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ la matrice formée de la concaténation de ces colonnes. Alors $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ et :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j\Big)e_i.$$

On constate que la matrice associée au vecteur $u(x)$ pour la base $(e)$ est : $Y = A\overline{X}$.

**Question 6.** Notons X et X′ les matrices associées à $x$ respectivement pour les bases $(e)$ et $(f)$. Alors $A\overline{X}$ et $B\overline{X}'$ sont les matrices associées au vecteur $u(x)$ pour les bases $(e)$ et $(f)$. Les formules de changement de base donnent : $X' = S^{-1}X$ et $B\overline{X}' = S^{-1}A\overline{X}$, donc $B\overline{S}^{-1}\overline{X} = S^{-1}A\overline{X}$. Ceci étant vrai pour tout vecteur X, on en déduit : $B\overline{S}^{-1} = S^{-1}A$, soit : $B = S^{-1}A\overline{S}$.

### Exemples

**Question 7.** Pour $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, la relation $A\overline{X} = \mu X$ est équivalente à $\begin{cases} \overline{b} = -\mu a \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$.
Si $\mu = 0$ alors $a = b = 0$ et $X = 0$ ne peut être vecteur co-propre ; si $\mu \neq 0$ alors $\overline{b} = -\mu\overline{\mu}\overline{b} = -|\mu|^2\overline{b}$ et $b = 0$. Ceci implique aussi $a = 0$, soit $X = 0$.
A n'a donc aucune valeur co-propre ni bien sûr aucun vecteur co-propre.

**Question 8.** Si A est réelle et admet une valeur propre réelle $\lambda$, il existe un vecteur propre *réel* X associé à $\lambda$ : $AX = \lambda X$. Or X est réel donc $\overline{X} = X$, et ainsi A admet $\lambda$ comme valeur co-propre et X pour vecteur co-propre.

## Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de $A\overline{A}$

**Question 9.** Soit X un vecteur co-propre de A associé à $\mu$ : $A\overline{X} = \mu X$, soit encore, en conjuguant : $\overline{A}X = \overline{\mu}\overline{X}$.
Alors $A\overline{A}X = \overline{\mu}A\overline{X} = \mu\overline{\mu}X = |\mu|^2 X$. X est non nul donc c'est un vecteur propre de $A\overline{A}$ associé à la valeur propre $|\mu|^2$.

**Question 10.** Envisageons deux cas.

i. Supposons les vecteurs $A\overline{X}$ et X liés.

Puisque X est non nul, il existe un nombre complexe $\mu$ tel que : $A\overline{X} = \mu X$ et qui est donc une valeur co-propre de A. Les calculs effectués à la question précédente et l'unicité d'une valeur propre associée à un vecteur propre, montrent que $|\mu|^2 = \lambda$ et donc que $|\mu| = \sqrt{\lambda}$. et la question 2 a montré que tous les nombres complexes de même module que $\mu$ sont des valeurs co-propres de A et en particulier parmi eux $\sqrt{\lambda}$.

ii. Supposons les vecteurs $A\overline{X}$ et X indépendants.

X ne peut être vecteur co-propre de A, mais nous allons chercher une combinaison linéaire non triviale $\alpha A\overline{X} + \beta X$ qui soit vecteur co-propre de A associé à la valeur co-propre $\sqrt{\lambda}$ :

$$A\left(\overline{\alpha A\overline{X} + \beta X}\right) = \overline{\alpha}A\overline{A}X + \overline{\beta}A\overline{X} = \alpha\lambda X + \overline{\beta}A\overline{X}$$

Et puisque la famille $(X, A\overline{X})$ est libre :

$$A\left(\overline{\alpha A\overline{X} + \beta X}\right) = \sqrt{\lambda}(\alpha A\overline{X} + \beta X) \iff \begin{cases} \alpha\lambda = \beta\sqrt{\lambda} \\ \overline{\beta} = \alpha\sqrt{\lambda} \end{cases}$$

On constate que les valeurs $\alpha = 1$ et $\beta = \sqrt{\lambda}$ conviennent ; on obtient ainsi le vecteur non nul $Y = A\overline{X} + \sqrt{\lambda}X$, vecteur co-propre pour la valeur co-propre $\sqrt{\lambda}$.

**Question 11.** La condition est nécessaire d'après la question 9, et suffisante d'après 10 ($\mu$ étant un réel positif, $\sqrt{\mu^2} = \mu$).

**Question 12.** Il suffit, compte tenu du résultat précédent, d'étudier les valeurs propres réelles et positives de la matrice :

$$A_m\overline{A}_m = A_m^2 = \begin{pmatrix} m^2-1 & -m \\ m & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(m est réel).}$$

Le polynôme caractéristique de cette dernière matrice vaut : $X^2 - (m^2-2)X + 1$, équation de discriminant $\Delta = m^2(m^2-4)$. Ainsi il y a des racines réelles (qui sont aussi les valeurs propres) si et seulement si $m = 0$ ($-1$ est alors valeur propre double) ou $|m| \geqslant 2$ et dans ce dernier cas elles sont positives (car leur produit vaut $1 > 0$ et leur somme $m^2 - 2 > 0$).
Compte tenu de la question précédente, la condition $|m| \geqslant 2$ est donc nécessaire et suffisante pour que la matrice $A_m$ admette des valeurs co-propres réelles positives, qui sont $\mu = \sqrt{\dfrac{m^2 - 2 \pm m\sqrt{m^2-4}}{2}}$.

## Cas d'une matrice triangulaire supérieure

**Question 13.** Si A est une matrice triangulaire d'éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (qui en sont donc les valeurs propres), alors $A\overline{A}$ est encore triangulaire et d'éléments diagonaux $|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2$ qui en sont les valeurs propres.
D'après la question 11, $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|$ sont valeurs co-propres de A ; D'après la question 2, il en est de même de tout nombre de la forme $\lambda_k e^{i\theta}$, avec $k \in [\![1, n]\!]$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

**Question 14.** Les valeurs co-propres de A sont exactement les complexes $\mu$ tels que $|\mu|^2$ soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$ et donc ici tels que : $|\mu| = |\lambda_k|$, avec $k \in [\![1, n]\!]$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mu e^{i\theta} = \lambda_k$.

**Question 15.** A est triangulaire et son unique valeur propre des $i$, donc ses valeurs co-propres sont les nombres complexes de module 1, ce qui est le cas de 1.
Cherchons un vecteur co-propre X associé à 1 :
Si $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} (b+c)+i(a-d) \\ d+ic \end{pmatrix}$, et :

$$\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \iff \begin{cases} a = b+c \\ d = c \end{cases} \iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} b(1+i)+c \\ c(1+i) \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

L'espace $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$ est le plan vectoriel *réel* (et pas complexe, voir question 3) engendré par les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

## Une caractérisation des valeurs co-propres

**Question 16.** Remarquons tout d'abord, ce qui facilitera les calculs qui vont suivre, que d'après la question 2, $\mu$ est valeur co-propre de A si et seulement si $|\mu|$ l'est.
Soit X un vecteur non nul décomposé sous la forme $\mathrm{X} = \mathrm{Y} + i\mathrm{Z}$ , où Y et Z sont respectivement les parties réelles et imaginaires de X ; on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = |\mu|\mathrm{X} \iff \mathrm{BY} + \mathrm{CZ} + i(\mathrm{CY} - \mathrm{BZ}) = |\mu|\mathrm{Y} + i|\mu|\mathrm{Z} \iff \begin{cases} \mathrm{BY} + \mathrm{CZ} = |\mu|\mathrm{Y} \\ \mathrm{CY} - \mathrm{BZ} = |\mu|\mathrm{Z} \end{cases}$$

Le système obtenu est équivalent au système de taille $2n$, défini par les blocs suivants :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \mathrm{C} & -\mathrm{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}$ est non nul. Ce système n'est autre que celui qui caractérise les vecteurs propres $\begin{pmatrix} \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ associés à la valeur propre $|\mu|$ pour la matrice D, ce qui permet de conclure.

# Partie II.

## Une relation d'équivalence

**Question 17.** La relation est *réflexive* car $\mathrm{A} \sim \mathrm{A}$ (prendre $\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$).
La relation est *symétrique* : en effet si $\mathrm{B} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}\overline{\mathrm{S}}$ alors $\mathrm{A} = \mathrm{S}\mathrm{B}\overline{\mathrm{S}}^{-1} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{B}\overline{\mathrm{T}}$ avec $\mathrm{T} = \mathrm{S}^{-1}$ donc $\mathrm{A} \sim \mathrm{B} \iff \mathrm{B} \sim \mathrm{A}$.
Enfin, la relation est *transitive* : si $\mathrm{B} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}\overline{\mathrm{S}}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{B}\overline{\mathrm{T}}$ alors $\mathrm{C} = (\mathrm{ST})^{-1}\mathrm{A}(\overline{\mathrm{ST}})$ donc $(\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \sim \mathrm{C}) \implies \mathrm{A} \sim \mathrm{C}$.
Il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

## Indépendance des vecteurs co-propres

**Question 18.** Démontrons que la famille $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k)$ est libre en raisonnant par récurrence sur l'entier $k$.

- Pour $k = 1$ c'est immédiat puisque $\mathrm{X}_1$ est non nul.
- Pour $k \geqslant 2$, supposons la famille $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{k-1})$ libre. Il s'agit de démontrer que $\mathrm{X}_k$ n'est pas combinaison linéaire de $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{k-1})$. Supposons au contraire l'existence de $k-1$ complexes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ tels que $\mathrm{X}_k = \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p \mathrm{X}_p$. Alors :

  $$\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}_k} = \sum_{p=1}^{k-1} \overline{\alpha_p}\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}_p} = \sum_{p=1}^{k-1} \mu_p \overline{\alpha_p} \mathrm{X}_p \quad \text{et} \quad \mu_k \mathrm{X}_k = \sum_{p=1}^{k-1} \mu_k \alpha_p \mathrm{X}_p.$$

  Puisque la famille $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{k-1})$ est libre on en déduit :

  $$\forall p \in [\![1, k-1]\!], \quad \mu_k \alpha_p = \mu_p \overline{\alpha_p} \text{ et en particulier } |\mu_k||\alpha_p| = |\mu_p||\alpha_p|.$$

  Puisque $p \neq k \Rightarrow |\mu_k| \neq |\mu_p|$, chacun des $\alpha_p$ est nul, ce qui contredit la non nullité du vecteur co-propre $\mathrm{X}_k$.
  Ainsi, $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k)$ est libre et la récurrence se propage.

**Question 19.** Dans l'hypothèse où la matrice $A\overline{A}$ a $n$ valeurs propres positives et distinctes, la question 11 prouve que la matrice A admet les $n$ co-valeurs propres réelles positives distinctes (donc de modules distincts) $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$, auxquelles on peut associer une famille de $n$ vecteurs co-propres $(X_1, \dots, X_n)$. La question précédente montre que cette famille est libre, donc est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si S désigne la matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base, la matrice $B = S^{-1}A\overline{S}$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs $(A\overline{X}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ exprimés dans la base $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. On a ainsi $B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, qui est diagonale.
A est bien co-diagonalisable.

## Quelques propriétés

**Question 20.** On calcule : $A\overline{A} = S\overline{S}^{-1}\overline{S}S^{-1} = I_n$. Ainsi, une matrice A co-semblable à $I_n$ est inversible et d'inverse $\overline{A}$.

**Question 21.** $S(\theta) = e^{i\theta}(A + e^{-2i\theta}I_n)$ est inversible si et seulement si $-e^{-2i\theta}$ n'est pas valeur propre de A, ce qui est toujours réalisable (pour une infinité de valeurs réelles de $\theta$) puisque le spectre de A est fini. Pour un tel $\theta$ on peut écrire, puisque $A\overline{A} = I_n$ :

$$A\overline{S(\theta)} = e^{-i\theta}A\overline{A} + e^{i\theta}A = S(\theta)$$

et finalement : $A = S(\theta)\overline{S(\theta)}^{-1}$.
Ainsi, nous avons prouvé qu'une matrice A est co-semblable à $I_n$ si et seulement si elle est inversible et $A^{-1} = \overline{A}$.

## Une condition nécessaire

**Question 22.** Si $D = S^{-1}A\overline{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $A = SD\overline{S}^{-1}$ et : $\overline{A} = \overline{S}\overline{D}S^{-1}$. Ainsi, $A\overline{A} = S(D\overline{D})S^{-1}$, ce qui prouve la diagonalisabilité de la matrice $A\overline{A}$, semblable à la matrice diagonale $D\overline{D} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$. De plus, le spectre de $A\overline{A}$ est $\{|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2)\} \subset \mathbb{R}_+$.
enfin, $\operatorname{rg}(A\overline{A})$ est le nombre d'éléments diagonaux non nuls de $D\overline{D}$ qui est le même que celui de D, c'est-à-dire $\operatorname{rg} D = \operatorname{rg} A$.

## Exemples

**Question 23.** A et C sont des matrices n'ayant qu'une seule valeur propre et non proportionnelles à $I_n$, donc ne sont pas diagonalisables.
$A\overline{A} = I_2$ prouve que A est co-semblable à $I_2$ d'après la question 21, donc A est co-diagonalisable. En revanche, $C\overline{C} = C^2 = 0$, donc $\operatorname{rg} C = 1 \neq \operatorname{rg}(C\overline{C}) = 0$, et d'après la question 22, C n'est pas co-diagonalisable.
B et D ont le même polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 2$ et donc les mêmes valeurs propres $1 \pm i$. B et D sont donc diagonalisables.
$B\overline{B} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres $(1+i)^2 = 2i$ et $(1-i)^2 = -2i$ qui ne sont pas réelles ; la question 22 montre que B n'est pas co-diagonalisable. En revanche, $D\overline{D} = 2I_2$ prouve, en appliquant la caractérisation de la question 21 que D est co-semblable à $\sqrt{2}I_2$ ; elle est donc co-diagonalisable.

**Remarque.** Ces quatre exemples montrent que les quatre cas de figure sont possibles :

- A n'est pas diagonalisable mais est co-diagonalisable ;
- B est diagonalisable mais n'est pas co-diagonalisable ;
- C n'est ni diagonalisable ni co-diagonalisable ;
- D est diagonalisable et co-diagonalisable.