Sommes de projecteurs (Mines PC 2014)

Durée : libre

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, et u un endomorphisme non nul de E.

On appelle *homothétie* un multiple scalaire de l'identité, et *projecteur* un endomorphisme p de E idempotent, c'est-à-dire tel que $p \circ p = p$.

Partie I. Traces et projecteurs

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace* de A le réel $\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

Question 1. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Question 2. Montrer que la trace de la matrice $A = \operatorname{Mat}_{(b)}(u)$ associée à u est indépendante de la base (b).

On appelle *trace* de u, notée $\operatorname{tr}(u)$, la valeur commune des traces des matrices représentant u. On dit que la trace est un *invariant de similitude*.

Question 3. Soit p un projecteur de E. Démontrer que $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$.

Question 4. En déduire que $\operatorname{rg}(p) = \operatorname{tr}(p)$.

Question 5. On pose $q = \operatorname{Id} - p$. Montrer que $\operatorname{Im}(q) = \operatorname{Ker}(p)$ et que $\operatorname{Ker}(q) = \operatorname{Im}(p)$.

Question 6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de E est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.

Question 7. Montrer que si l'endomorphisme s est une somme finie de projecteurs p_i, $i = 1, \ldots, m$, alors $\operatorname{tr}(s) \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{tr}(s) \geqslant \operatorname{rg}(s)$.

Partie II. Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur p est égal à 1.

Question 8. Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $p \circ u \circ p = \mu p$.

Question 9. Soit $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$. Montrer que dans la base (e) la matrice qui représente u s'écrit

$$\operatorname{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \mu & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \boxed{\quad B \quad} & \\ \times & & & \end{pmatrix} \tag{1}$$

où μ est le nombre réel dont l'existence découle de la question 8, et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Question 10. Montrer que si $q \circ u \circ q$ n'est pas proportionnel à q, alors B, défini en (1), n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $q = \operatorname{Id} - p$.

Partie III. Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme u n'est pas une homothétie.

Question 11. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que x et $u(x)$ ne soient pas colinéaires.

Question 12. Montrer qu'il existe une base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est de la forme suivante :

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathrm{A} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \qquad \text{où } \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Question 13. En déduire que si $\operatorname{tr} u = 0$, il existe une base (e') dans laquelle la diagonale de $\mathrm{Mat}_{(e')}(u)$ est nulle.

Dans la suite de cette partie on considère une suite $t_1, \dots, t_n$ de n nombres réels vérifiant $\operatorname{tr}(u) = \sum_{k=1}^{n} t_k$.

Question 14. En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base (e) dans laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ ait pour éléments diagonaux t_1 et t_2.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On admettra qu'en dimension $n \geqslant 3$ il existe un projecteur p de E de rang 1, tel que d'une part $p \circ u \circ p = \mu p$ et d'autre part $q \circ u \circ q$ ne soit pas proportionnel à $q = \mathrm{Id} - p$.

Question 15. En dimension $n \geqslant 3$, à l'aide des questions 9 et 10 démontrer qu'il existe une base (e) dans laquelle la matrice représentant u s'écrit

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} t_1 & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \mathrm{B} & \\ \times & & & \end{pmatrix} \qquad \text{où B n'est pas une homothétie.} \tag{3}$$

Question 16. En dimension $n \geqslant 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base (e') dans laquelle $\mathrm{Mat}_{(e')}(u)$ ait pour éléments diagonaux les t_k, $k = 1, \dots, n$.

Partie IV. Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que u est un endomorphisme de E vérifiant $\operatorname{tr}(u) \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{tr}(u) \geqslant \operatorname{rg}(u)$. On pose $\rho = \operatorname{rg}(u)$ et $\theta = \operatorname{tr}(u)$.

Question 17. Montrer qu'il existe une base (e) dans laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est de la forme suivante :

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{A}_1} & \boxed{\mathrm{O}} \\ \boxed{\mathrm{A}_2} & \boxed{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \qquad \text{où } \mathrm{A}_1 \text{ est une matrice de taille } \rho \times \rho. \tag{4}$$

Supposons tout d'abord que A_1 ne soit pas la matrice d'une homothétie.

Question 18. À l'aide de la question 16 montrer qu'il existe une base (e') dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{(e')}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{A}'_1} & \boxed{\mathrm{O}} \\ \boxed{\mathrm{A}'_2} & \boxed{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \tag{5}$$

où A'_1 est une matrice de taille $\rho \times \rho$ dont les éléments diagonaux $t_1, \dots, t_\rho$ sont des entiers non nuls.

Question 19. En déduire que u est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

On suppose maintenant que A_1 est la matrice d'une homothétie.

Question 20. Démontrer que là encore, u est la somme d'un nombre fini de projecteurs.