Corrigé : sommes de projecteurs (Mines PC 2014)

Partie I. Traces et projecteurs

Question 1. Posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$; le coefficient d'indice (i,i) de AB vaut $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$ donc $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$.
De même, le coefficient d'indice (j,j) de BA vaut $\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$ donc $\mathrm{tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$.
Ces deux sommes sont identiques (seul l'ordre de sommation diffère) donc $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Question 2. Considérons deux bases (b) et (b'), notons $P = \mathrm{Mat}_{(b)}(b')$ la matrice de passage de (b) vers (b'), et posons $A = \mathrm{Mat}_{(b)}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{(b')}(u)$. Alors $A' = P^{-1}AP$, et $\mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(P^{-1}(AP)) = \mathrm{tr}((AP)P^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$. La trace de la matrice $A = \mathrm{Mat}_{(b)}(u)$ est bien indépendante du choix de la base (b).

Question 3. Considérons un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Alors $p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. On en déduit que $p \circ p(y) = 0_E$. Mais $p \circ p(y) = p(y) = x$ car p est un projecteur, donc $x = 0_E$ et $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_E\}$. La somme $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ est directe et d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) = n$ donc $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$.

Question 4. Dans une base (e) adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ on a

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(p) = \begin{pmatrix} \boxed{I_r} & \boxed{O} \\ \boxed{O} & \boxed{O} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } r = \dim(\mathrm{Im}(p))$$

puisque pour tout vecteur $x = u(y)$ dans $\mathrm{Im}(p)$, $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$. On a donc $r = \mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.

Question 5. Pour tout $x = u(y) \in \mathrm{Im}(p)$, $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$ donc $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(q)$.
Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$ alors $(\mathrm{Id} - p)(x) = 0_E$, et $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$. On a donc $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$ et en définitive $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(q)$.
Puisque q est aussi un projecteur (on a $(\mathrm{Id}-p)\circ(\mathrm{Id}-p) = \mathrm{Id} - 2p + p \circ p = \mathrm{Id} - p$) on a donc aussi $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - q) = \mathrm{Ker}(p)$.

Question 6. D'après la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \leqslant \dim F + \dim G$.

Question 7. La trace est un opérateur linéaire, donc $\mathrm{tr}(s) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}(p_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rg}(p_i) \in \mathbb{N}$.
Montrons maintenant par récurrence sur m que $\mathrm{rg}(s) \leqslant \mathrm{tr}(s)$.

- Si $m = 1$ il suffit d'appliquer la question 4.
- Si $m > 1$, supposons le résultat acquis au rang $m - 1$: si $s' = \sum_{i=1}^{m-1} p_i$ alors $\mathrm{rg}(s') \leqslant \mathrm{tr}(s')$.

  On a $s = s' + p_m$ donc $\mathrm{rg}(s) = \dim(\mathrm{Im}(s' + p_m))$. Mais $\mathrm{Im}(s' + p_m) \subset \mathrm{Im}(s') + \mathrm{Im}(p_m)$ donc $\mathrm{rg}(s) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(s') + \mathrm{Im}(p_m))$.

  On applique la question 6 : $\mathrm{rg}(s) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(s')) + \dim(\mathrm{Im}(p_m)) = \mathrm{rg}(s') + \mathrm{rg}(p_m) \leqslant \mathrm{tr}(s') + \mathrm{tr}(p_m) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}(p_i) = \mathrm{tr}(s)$.
  Le résultat est établi au rang m donc la récurrence se propage.

Partie II. Projecteurs de rang 1

Question 8. Soit a un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(p)$; il en constitue une base puisque $\mathrm{rg}(p) = 1$.
Le vecteur $p(u(a))$ est élément de $\mathrm{Im}(p)$ donc il existe un réel μ tel que $p(u(a)) = \mu a$. Nous allons montrer que ce réel μ convient.
Pour tout $x \in E$, $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) = \lambda a$. Alors $p \circ u \circ p(x) = p \circ u(\lambda a) = \lambda p(u(a)) = \lambda\mu a = \mu p(x)$.
Cette égalité étant vraie pour tout $x \in E$, on en déduit que $p \circ u \circ p = \mu p$.

Question 9. Nous avons $e_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{Ker}(p)$. Si on décompose $u(e_1)$ dans cette base : $u(e_1) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, nous devons montrer que $\lambda_1 = \mu$.

Pour ce faire, on calcule $p(u(e_1)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p(e_k) = \lambda_1 e_1$ puisque $p(e_1) = e_1$ et $p(e_k) = 0_{\mathrm{E}}$ pour $k \geqslant 2$.

Ainsi, $p \circ u \circ p(e_1) = p(u(e_1)) = \lambda_1 e_1$. Mais d'après la question 8 on a aussi $p \circ u \circ p(e_1) = \mu p(e_1) = \mu e_1$, ce qui permet d'en déduire que $\lambda_1 = \mu$.

Question 10. Supposons que B soit la matrice d'une homothétie de rapport λ ; alors $\mathrm{B} = \lambda \mathrm{I}_{n-1}$. Posons alors

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \mu & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \times & \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \times & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{de sorte que } u(e_k) = \alpha_k e_1 + \lambda e_k.$$

$q(e_1) = 0_{\mathrm{E}}$ donc $q \circ u \circ q(e_1) = 0_{\mathrm{E}} = \lambda q(e_1)$.
Pour tout $k \geqslant 2$, $q(e_k) = e_k$ donc $q \circ u \circ q(e_k) = q(u(e_k)) = q(\alpha_k e_1 + \lambda e_k) = \lambda e_k = \lambda q(e_k)$.
Les endomorphisme $q \circ u \circ q$ et λq coïncident sur la base (e) ; ils sont égaux.
Par contraposée on en déduit que si $q \circ u \circ q$ n'est pas proportionnel à q alors B n'est pas la matrice d'une homothétie.

Partie III. Endomorphismes différents d'une homothétie

Question 11. Considérons une base $(b) = (b_1, \ldots, b_n)$ de E et supposons que pour tout $x \in \mathrm{E}$ les vecteurs $u(x)$ et x soient colinéaires. En particulier, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $u(b_k) = \lambda_k b_k$.
Pour $i \neq j$, considérons maintenant le vecteur $u(b_i + b_j) = \lambda_i b_i + \lambda_j b_j$. Par hypothèse il est colinéaire à $b_i + b_j$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(b_i + b_j) = \alpha(b_i + b_j)$. Par unicité de la décomposition dans une base on en déduit que $\lambda_i = \alpha = \lambda_j$.
Ainsi, tous les λ_i sont égaux, ce qui prouve que u est une homothétie.
Par contraposée on en déduit que si u n'est pas une homothétie il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre.

Question 12. D'après le théorème de la base incomplète on peut compléter cette famille $(x, u(x))$ pour obtenir une base (e) dans laquelle $e_1 = x$ et $e_2 = u(x)$. Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ a la forme souhaitée.

Question 13. Supposons $\mathrm{tr}(u) = 0$ et raisonnons par récurrence sur la dimension n de E.

- Si $n = 1$ u est l'endomorphisme nul et le résultat est établi dans n'importe quelle base.
- Si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis en dimension $n-1$.

  Commençons par appliquer la question 12, posons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$ et notons $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$ l'endomorphisme de F dont la matrice dans la base $(e_2, \ldots, e_n)$ est la matrice A de l'équation (2).

  Si v est une homothétie de rapport λ, on a $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_{n-1}$ et $\mathrm{tr}(u) = (n-1)\lambda$ donc $\lambda = 0$ et la base (e) convient.

  Si v n'est pas une homothétie, on a $\mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(u) = 0$ donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une base $(e'_2, \ldots, e'_n)$ de F dans laquelle la diagonale de $\mathrm{Mat}_{(e')}(v)$ est nulle.

  Posons alors $e'_1 = e_1$; nous allons montrer que la base (e') répond à nos exigences :

  - $u(e'_1) = u(e_1) = e_2 \in \mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e'_2, \ldots, e'_n)$: la première composante du vecteur $u(e'_1)$ dans la base (e') est bien nulle.
  - Si $k \in [\![2, n]\!]$, $e'_k \in \mathrm{F}$ donc il existe un scalaire α_k tel que $u(e'_k) = \alpha_k e_1 + v(e'_k)$, et par hypothèse de récurrence le scalaire devant e'_k dans la décomposition de $v(e'_k)$ dans la base $(e'_2, \ldots, e'_n)$ est nulle.

  De ceci il résulte que $\mathrm{Mat}_{(e')}(u)$ est bien à diagonale nulle ; la récurrence se propage.

Question 14. u n'est pas une homothétie donc $u - t_1\mathrm{Id}$ non plus : d'après la question 11 il existe un vecteur e_1 tel que e_1 et $(u - t_1\mathrm{Id})(e_1)$ ne soient pas colinéaires. Posons $e_2 = (u - t_1\mathrm{Id})(e_1)$. Alors (e_1, e_2) est une base de E, et $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} t_1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ puisque $u(e_1) = t_1 e_1 + e_2$. Par invariance de la trace on a $t_1 + b = \mathrm{tr}(u) = t_1 + t_2$ donc $b = t_2$, ce qui établit le résultat souhaité.

Question 15. Appliquons la propriété admise au réel $\mu = t_1$. D'après la question 9 il existe une base (e) dans laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ a la forme requise dans l'équation (3), et d'après la question 10 la matrice B n'est pas la matrice d'une homothétie.

Question 16. Raisonnons par récurrence sur n.

– Si $n = 2$, le résultat a été établi à la question 14.
– Si $n \geqslant 3$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$. On commence par appliquer la question 15 puis on procède peu ou prou comme à la question 13 : on pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ et on note $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$ l'endomorphisme de F dont la matrice dans la base $(e_2, \dots, e_n)$ est B.

  On a $\mathrm{tr}(\mathrm{B}) = \sum_{k=2}^{n} t_k$ donc par hypothèse de récurrence il existe une base $(e'_2, \dots, e'_n)$ de F dans laquelle les éléments de la diagonale de $\mathrm{Mat}_{(e')}(v)$ sont les $t_2, \dots, t_n$.
  Posons $e'_1 = e_1$, et vérifions que la base (e') répond eux exigences de l'énoncé.
  – On a $u(e_1) - t_1 e_1 \in \mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e'_2, \dots, e'_n)$ donc la première composante de $u(e'_1)$ dans la base (e') est bien t_1.
  – Si $k \in [\![2, n]\!]$, il existe un scalaire α_k tel que $u(e'_k) = \alpha_k e_1 + v(e'_k)$, et par hypothèse le coefficient de e'_k dans la décomposition de $v(e'_k)$ dans la base (e') vaut t_k.

  De ceci il résulte que les éléments diagonaux de $\mathrm{Mat}_{(e')}(u)$ sont les $t_1, \dots, t_n$: la récurrence se propage.

Partie IV. Décomposition en somme de projecteurs

Question 17. Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. Alors $\dim(\mathrm{H}) = \mathrm{rg}(u) = \rho$, et dans une base adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ a bien la forme souhaitée.

Question 18. A_1 n'est pas une homothétie, et $\mathrm{tr}(\mathrm{A}_1) = \mathrm{tr}(u) = \theta$. Puisque θ est un entier supérieur ou égal à ρ, il est possible de le décomposer comme somme de ρ entiers non nuls : $\theta = t_1 + \cdots + t_\rho$. D'après la question 16 appliquée à la restriction de u à H, A_1 est semblable à une matrice A'_1 dont les éléments diagonaux sont les $t_1, \dots, t_\rho$. Dans cette nouvelle base de H, toujours complétée par une base de $\mathrm{Ker}(u)$,la matrice associée à u prend la forme décrite par l'équation (5).

Question 19. Pour tout $i \in [\![1, \rho]\!]$, notons C_i la colonne de rang i de la matrice $\mathrm{Mat}_{(e')}(u)$, et considérons l'endomorphisme v_i dont la matrice dans la base (e') est $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mathrm{C}_i & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (toutes les colonnes sont nulles sauf la ie égale à C_i).
Autrement dit, v_i est l'endomorphisme défini par les relations $v_i(e'_j) = 0_\mathrm{E}$ si $j \neq i$, et $v_i(e'_i) = u(e'_i)$.
On a alors $u = v_1 + \cdots + v_\rho$.
Par ailleurs, $v_i^2 = t_i v_i$. Ceci peut se constater matriciellement ou vectoriellement, en constatant que $v_i^2(e'_j) = 0_\mathrm{E}$ si $j \neq i$, et $v_i^2(e'_i) = v_i(u(e'_i)) = v_i(t_i e'_i) + 0_\mathrm{E} = t_i v(e'_i)$.
De ceci il résulte que $p_i = \dfrac{1}{t_i} v_i$ est un projecteur, et $u = \sum_{i=1}^{\rho} t_i p_i = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{t_i} p_i$ apparaît comme la somme d'un nombre fini de projecteurs.

Question 20. Si A_1 est la matrice d'une homothétie alors $\mathrm{A}_1 = \lambda \mathrm{I}_\rho$, et $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(u) = \theta$ donc $\theta = \rho\lambda$. Puisque u est supposé non nul on a $\mathrm{tr}(u) \geqslant \mathrm{rg}(u) > 0$ et donc $\lambda \geqslant 1$.
Considérons la projection vectorielle p sur $\mathrm{Vect}(e_1)$, parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{(e)}(u-p) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{A}'_1} & \boxed{\mathrm{O}} \\ \boxed{\mathrm{A}_2} & \boxed{\mathrm{O}} \end{pmatrix}$$

où A'_1 n'est plus une matrice d'homothétie si $\rho \geqslant 2$.
Si $\lambda > 1$ on a $\mathrm{tr}(u) \geqslant \mathrm{rg}(u) + 1$ donc $\mathrm{tr}(\mathrm{A}'_1) = \mathrm{tr}(u) - 1 \geqslant \mathrm{rg}(u) \geqslant \mathrm{rg}(u-p)$ donc on peut appliquer la question précédente à $u - p$: cet endomorphisme est somme d'un nombre fini de projecteurs, et il en est de même de u.

Enfin, si $\lambda = 1$ ou $\rho = 1$, on peut appliquer la démarche de la question précédente avec $t_i = \lambda \in \mathbb{N}$, ce qui permet de conclure.