Interpolation de Lagrange (d'après Saint-Cyr 93 et ENSAIT 99)

Durée : 4 heures

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On conviendra de confondre un polynôme avec la fonction polynomiale qui lui est associée.
Les parties II, III et IV de ce problème sont indépendantes entre elles.

Partie I. Polynôme de Lagrange

Étant donnée une famille de $(n+1)$ réels distincts $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, on définit les polynômes $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ par :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \qquad L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Question 1. Que vaut $L_i(x_j)$ lorsque $i \neq j$? et lorsque $i = j$? En déduire que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 2. On considère de plus $(n+1)$ réels quelconques $y_0, y_1, \dots, y_n$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $L(x_j) = y_j$. On exprimera L dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$.

Question 3. À l'aide de la question 2, calculer les sommes $\sum_{i=0}^{n} L_i(X)$ et $\sum_{i=0}^{n} x_i L_i(X)$, puis plus généralement $\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(X)$ lorsque $k \in [\![0, n]\!]$.

Partie II. Étude matricielle

Dans cette partie on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{B}' = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ la base des polynômes de Lagrange, et A la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, autrement dit la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes sont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs $L_0, L_1, \dots, L_n$.

Question 4. *Dans cette question uniquement, on suppose* $n = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ *et* $x_2 = 2$.

a) Calculer les polynômes L_0, L_1 et L_2, puis la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Déterminer les vecteurs $U \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient $AU = U$.

c) En déduire les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.

Question 5. *Dans cette question et les suivantes on revient au cas général.*

a) Justifier que A est inversible et calculer son inverse.

b) Montrer que la somme des éléments de la première ligne de A est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre ligne de A est nulle. On pourra pour ce faire considérer le produit matriciel AU où U est le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

Question 6. *Dans cette question uniquement on suppose que* $x_0 = 0$.

a) Montrer que la matrice $A - I$ n'est pas inversible, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ différents du polynôme nul et qui vérifient : $P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) X^i$.

Question 7. *Dans cette question uniquement on suppose que* $x_0 = 1$.
Montrer que la somme des éléments de la première colonne de A est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre colonne de A est nulle.

Question 8. *Dans cette question uniquement, on suppose* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\dots$, $x_n = n$ *et on note* $L_{i,n}$ *le polynôme que l'on notait précédemment simplement* L_i. *De plus, on conviendra que* $L_{0,0} = 1$.

a) Montrer que $\mathcal{B}'' = (L_{0,0}, L_{1,1}, \dots, L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soient j et k deux entiers naturels. Calculer $L_{k,k}(j)$ (on distinguera les cas $j < k$, $j = k$ et $k > k$), et en déduire la matrice de changement de base de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}''$.

c) Prouver alors que l'on peut écrire la matrice A comme le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure.

d) Effectuer tous les calculs du 8c dans le cas où $n = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Partie III. Convergence de la suite des polynômes d'interpolation

Dans toute cette partie, on considère la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$, a désignant un réel strictement positif.

Dans cette partie uniquement, on définit les réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ par : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i = -1 + 2\dfrac{i}{n}$.

On note enfin P_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ vérifiant : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{P}(x_i) = f(x_i)$. Son existence et son unicité sont établies par la question 2. On dit que P_n est le *polynôme d'interpolation* de f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Question 9.

a) Montrer que si une fonction $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et possède $(n+2)$ zéros distincts dans $[-1,1]$ alors la dérivée d'ordre $(n+1)$ de ψ s'annule dans $]-1,1[$.

b) En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$ il existe un réel $c_x \in]-1,1[$ tel que :

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

Indication. Le réel x étant fixé, on pourra considérer la fonction $\psi : t \mapsto f(t) - \mathrm{P}_n(t) - (t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)\mathrm{A}$ où A est un réel convenablement choisi.

Question 10.

a) Déterminer deux nombres complexes λ et μ tels que $f(x) = \dfrac{\lambda}{x+ia} + \dfrac{\mu}{x-ia}$ et en déduire une expression de la dérivée d'ordre $(n+1)$ de f.

b) En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant \dfrac{(n+1)!}{a(x^2+a^2)^{(n+2)/2}}$.

Question 11. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right| \leqslant \dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{n^{n+1}}$.

Question 12.

a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$ on a $\left|\mathrm{P}_n(x) - f(x)\right| \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} \dfrac{n!}{a^{n+3}}$.

b) **Pour 5/2 uniquement**. Montrer que si $a > \dfrac{2}{\mathrm{e}}$ la suite (P_n) converge uniformément vers f sur $[-1,1]$.

Partie IV. Calcul pratique du polynôme d'interpolation

Dans cette partie $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des valeurs distinctes dans I, et L est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, autrement dit l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ vérifiant : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{L}(x_i) = f(x_i)$ (son existence et son unicité résultent de la question 2).

Question 13. Si $a, b, x_1, \ldots, x_n$ sont $(n+2)$ réels distincts de I, montrer que si P interpole f aux points $b, x_1, \ldots, x_n$ et si Q interpole f aux points $a, x_1, \ldots, x_n$ alors le polynôme S défini par

$$\mathrm{S}(\mathrm{X}) = \frac{(\mathrm{X}-a)\mathrm{P}(\mathrm{X}) - (\mathrm{X}-b)\mathrm{Q}(\mathrm{X})}{b-a}$$

interpole f aux points $a, b, x_1, \ldots, x_n$.

On définit par récurrence les quantités suivantes, appelées *différences divisées* :

Pour $x \in \mathrm{I}$, $f_0[x] = f(x)$; pour x, y distincts dans I, $f_1[x,y] = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ et plus généralement, si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont $(n+1)$ points distincts dans I on pose :

$$f_n[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f_{n-1}[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] - f_{n-1}[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

Question 14. Soit L le polynôme qui interpole f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Montrer que le coefficient du terme de plus haut degré de L est $f_n[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ (raisonner par récurrence et utiliser la question 13).

Question 15. En déduire que $f_n[x_0, x_1, \dots, x_n]$ est invariant par permutation des (x_i).

Question 16. Démontrer que

$$L(X) = f_0[x_0] + f_1[x_0, x_1](X - x_0) + f_2[x_0, x_1, x_2](X - x_0)(X - x_1) + \cdots + f_n[x_0, x_1, \dots, x_n](X - x_0)(X - x_1)\cdots(X - x_{n-1})$$

Question 17. Étant donnés deux entiers $i, j \in [\![0, n]\!]$ vérifiant $i + j \leqslant n$, on pose $t_{i,j} = f_i[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+i}]$.

a) Donner la valeur de $t_{0,j}$ puis exprimer $t_{i,j}$ en fonction de $t_{i-1,j}$ et de $t_{i-1,j+1}$ pour $i \geqslant 1$ et $j \leqslant n - i$.

b) En déduire une fonction Python `differencesDivisees(X, Y)` qui prend pour arguments deux tableaux `X` et `Y` de tailles $(n+1)$ contenant respectivement les valeurs $x_0, \dots, x_n$ et $f(x_0), \dots, f(x_n)$ et qui renvoie un tableau bi-dimensionnel `T` de taille $(n+1) \times (n+1)$ pour lequel `T[i][j]` $= t_{i,j}$.

Question 18. En déduire une fonction python `lagrange(X, Y, x)` qui prend pour arguments les mêmes tableaux `X` et `Y` ainsi qu'un réel x et qui renvoie la valeur de $L(x)$ (on utilisera la question 16).