Corrigé : interpolation de Lagrange (d'après Saint-Cyr 93 et ENSAIT 99)

Partie I. Polynômes de Lagrange

Question 1. On a $L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Considérons des scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ vérifiant $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, cette égalité appliquée en x_j donne $\lambda_j = 0$, donc la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre.

Sachant que $\text{card}(L_0, \dots, L_n) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ on en déduit que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 2. Posons $L = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$; alors $L \in \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $L(x_j) = y_j$.

Supposons l'existence d'un autre polynôme $M \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $M(x_j) = y_j$. Les $n+1$ valeurs $x_0, \dots, x_n$ seraient alors toutes racines du polynôme $L - M$. Or ce dernier est de degré inférieur ou égal à n donc ce ne peut qu'être le polynôme nul et ainsi $M = L$, ce qui prouve l'unicité de L.

Question 3. D'après la question précédente, le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} L_i$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $P(x_j) = 1$; Sachant que le polynôme constant 1 vérifie aussi ces conditions, on a nécessairement $P = 1$.

Plus généralement, le polynôme $Q = \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $Q(x_j) = x_j^k$; Sachant que le polynôme X^k vérifie aussi ces conditions, on a nécessairement $Q = X^k$.

Notez que ceci devient faux lorsque $k \geqslant n+1$ car dans ce cas le polynôme X^k n'est plus dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II. Étude matricielle

Question 4.

a) On a $L_0 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{3}{2}X + 1$, $\quad L_1 = \dfrac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)} = -X^2 + 2X$, $\quad L_2 = \dfrac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)} = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X$ donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Posons $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors $AU = U \iff \begin{cases} -3a + 2b - c = 0 \\ a - 2b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = a \\ c = -a \end{cases}$ donc $U = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

c) Posons $P = a + bX + cX^2$, de sorte que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = U$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(P) = AU$. Mais d'après la question 2, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(P) = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}$ donc $P = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$ si et seulement si $AU = U$, soit d'après la question précédente $P = a(1 + X - X^2)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Question 5.

a) A est la matrice de passage entre deux bases donc est inversible, et A^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.

Pour calculer A^{-1} il suffit donc d'exprimer les éléments de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$, ce qui est fait à la question 3 : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $X^k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i$. Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

b) Dans un premier temps, observons que AU est le vecteur dont les composantes sont les sommes des différentes lignes de A. Mais on peut aussi interpréter cette égalité comme une formule de changement de base, et dans ce cas AU est la matrices des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du polynôme $\sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_i$. Or d'après la question 3 cette somme est égale à 1 donc $\mathrm{AU} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, et la conclusion s'en suit.

Question 6.

a) Pour montrer que $\mathrm{A} - \mathrm{I}$ n'est pas inversible, il suffit de trouver un vecteur $\mathrm{U} \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul tel que $(\mathrm{A} - \mathrm{I})\mathrm{U} = 0$. Mais $(\mathrm{A} - \mathrm{I})\mathrm{U} = 0 \iff \mathrm{AU} = \mathrm{U} \iff \mathrm{U} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{U} \iff (\mathrm{A}^{-1} - \mathrm{I})\mathrm{U} = 0$ donc il suffit de prouver que $\mathrm{A}^{-1} - \mathrm{I}$ n'est pas inversible. C'est alors évident d'après la question 5a, puisque lorsque $x_0 = 0$ la première ligne de $\mathrm{A}^{-1} - \mathrm{I}$ est nulle.

b) C'est le même raisonnement qu'à la question 4 : trouver un polynôme non nul P vérifiant $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(x_i)\mathrm{X}^i$ revient à trouver un vecteur non nul $\mathrm{U} \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$, ce qui est possible puisque $\mathrm{A} - \mathrm{I}$ n'est pas inversible.

Question 7. La $(j+1)^{\mathrm{e}}$ colonne de A contient les composantes de L_j dans la base $\mathcal{B}$; si $\mathrm{L}_j = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{X}^i$ on nous demande de calculer $\sum_{i=0}^{n} a_i$, autrement dit $\mathrm{L}_j(1)$. Or puisque $x_0 = 1$ on a $\mathrm{L}_j(1) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La conclusion s'en suit.

Question 8.

a) Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ on a $\deg \mathrm{L}_{i,n} = n$ donc $(\mathrm{L}_{0,0}, \dots, \mathrm{L}_{n,n})$ est une base car échelonnée en degré.

b) On a $\mathrm{L}_{k,k} = \prod_{i=0}^{k-1} \dfrac{\mathrm{X} - i}{k - i}$ donc $\mathrm{L}_{k,k}(j) = 0$ si $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $\mathrm{L}_{k,k}(k) = 1$ et lorsque $j > k$, $\mathrm{L}_{k,k}(j) = \dfrac{j \times (j-1) \times \cdots \times (j-k+1)}{k!} = \dfrac{j!}{k!(j-k)!} = \dbinom{j}{k}$.

D'après la question 2, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathrm{L}_{k,k} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_{k,k}(i)\mathrm{L}_{i,n} = \sum_{i=k}^{n} \dbinom{i}{k} \mathrm{L}_{i,n}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')$ est une matrice triangulaire inférieure, et le coefficient de la $(i+1)^{\mathrm{e}}$ ligne et de la $(k+1)^{\mathrm{e}}$ colonne vaut $\dbinom{i}{k}$.

c) D'après la formule de changement de base, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}')$. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')$ est triangulaire supérieure car $\mathcal{B}''$ est échelonnée en degré, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}')$ est triangulaire inférieure car d'après la question précédente son inverse est triangulaire inférieure.

d) On a $\mathrm{L}_{0,0} = 1$, $\mathrm{L}_{1,1} = \mathrm{X}$ et $\mathrm{L}_{2,2} = \frac{1}{2}\mathrm{X}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{X}$ (calculé en 4a) donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

D'après la question 8b, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et en calculant son inverse on obtient $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Il reste au lecteur non convaincu à vérifier qu'on a bien

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie III. Convergence de la suite des polynômes d'interpolation

Question 9.

a) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

– Si $n = 0$, on considère une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1, 1]$ qui possède deux zéros $-1 \leqslant x_0 < x_1 \leqslant 1$. D'après le théorème de Rolle, sa dérivée ψ' possède une racine dans $]x_0, x_1[$ donc s'annule dans $]-1, 1[$.

– Si $n \geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$, et considérons une fonction $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ possédant $n+2$ zéros $-1 \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} \leqslant 1$. D'après le théorème de Rolle, sa dérivée ψ' s'annule sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i \in [\![0,n]\!]$ donc ψ' est de classe $\mathscr{C}^n$ et possède au moins $n+1$ zéros distincts dans $[-1,1]$. Par hypothèse de récurrence, la dérivée d'ordre n de ψ' s'annule dans $]-1,1[$, c'est-à-dire la dérivée d'ordre $n+1$ de ψ. La récurrence se propage.

b) Dans un premier temps, supposons $x \in [-1,1]$ distinct de $x_0, \dots, x_n$, et posons $\mathrm{A} = \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}$. Dans ce cas, la fonction ψ définie sur $[-1,1]$ par $\psi(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - (t-x_0)\cdots(t-x_n)\mathrm{A}$ s'annule en $x_0, x_1, \dots, x_n$ et en x. Elle possède donc $n+2$ zéros dans $[-1,1]$ et on peut lui appliquer la question précédente : sa dérivée d'ordre $n+1$ s'annule sur $]-1,1[$ donc il existe $c \in]-1,1[$ tel que $\psi^{(n+1)}(c) = 0$.

Mais P_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n donc $\mathrm{P}_n^{(n+1)} = 0$ et $\psi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - (n+1)!\mathrm{A}$, ce qui montre que $\mathrm{A} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$. En écrivant de nouveau que $\psi(x) = 0$ on obtient alors l'égalité $f(x) - \mathrm{P}_n(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

Il reste à traiter le cas où x est l'un des x_j, mais dans ce cas n'importe quel $c \in]-1,1[$ convient puisque $f(x_j) = \mathrm{P}_n(x_j)$.

Question 10.

a) On a $\dfrac{\lambda}{x+ia} + \dfrac{\mu}{x-ia} = \dfrac{(\lambda+\mu)x + ia(\mu-\lambda)}{x^2+a^2}$ donc il suffit de faire en sorte que $\lambda + \mu = 0$ et $\mu - \lambda = \dfrac{1}{ia}$, ce qui est réalisé pour $\lambda = -\dfrac{1}{2ia}$ et $\mu = \dfrac{1}{2ia}$.

Ainsi, on a $f(x) = \dfrac{1}{2ia}\Big(\dfrac{1}{x-ia} - \dfrac{1}{x+ia}\Big)$ et $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{2ia}\Big(\dfrac{1}{(x-ia)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+ia)^{n+1}}\Big)$.

b) On en déduit que $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant \dfrac{(n+1)!}{2a}\Big(\dfrac{1}{|x-ia|^{n+2}} + \dfrac{1}{|x+ia|^{n+2}}\Big) = \dfrac{(n+1)!}{a(x^2+a^2)^{(n+2)/2}}$.

Question 11. Le cas où x étant égal à l'un des x_j étant sans intérêt, supposons x distinct des x_j. Il existe alors un unique entier $j \in [\![0,n]\!]$ tel que $x_j < x < x_{j+1}$.

Pour tout $i \in [\![0,j]\!]$ on a $|x - x_i| = x - x_i \leqslant x_{j+1} - x_i = (j+1-i)\dfrac{2}{n}$. Pour tout $i \in [\![j+1,n]\!]$ on a $|x-x_i| = x_i - x \leqslant x_i - x_j = (i-j)\dfrac{2}{n}$.

Ainsi, $|(x-x_0)\cdots(x-x_n)| \leqslant \displaystyle\prod_{i=0}^{j}(j+1-i) \times \prod_{i=j+1}^{n}(i-j) \times \Big(\frac{2}{n}\Big)^{n+1} = (j+1)! \times (n-j)! \times \Big(\frac{2}{n}\Big)^{n+1}$.

Pour conclure il reste à observer qu'un coefficient binomial est toujours supérieur ou égal à 1 donc en particulier $\dbinom{n+1}{j+1} \geqslant 1$, ce qui se traduit par $(n+1)! \geqslant (j+1)!(n-j)!$. En conclusion, $|(x-x_0)\cdots(x-x_n)| \leqslant (n+1)!\Big(\dfrac{2}{n}\Big)^{n+1}$.

Question 12.

a) En combinant les questions 9b, 10b et 11 on obtient :

$$\left|\mathrm{P}_n(x) - f(x)\right| \leqslant \Big(\frac{2}{n}\Big)^{n+1} \frac{n!}{a(c_x^2+a^2)^{(n+2)/2}} \leqslant \Big(\frac{2}{n}\Big)^{n+1} \frac{n!}{a(a^2)^{(n+2)/2}} = \Big(\frac{2}{n}\Big)^{n+1} \frac{n!}{a^{n+3}}.$$

b) Posons $u_n = \Big(\dfrac{2}{n}\Big)^{n+1} \dfrac{n!}{a^{n+3}}$. D'après ce qui précède, $\left\|\mathrm{P}_n - f\right\|_\infty \leqslant u_n$.

On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{a}\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{-(n+1)} = \dfrac{2}{a}\exp\Big(-(n+1)\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)\Big)$ donc $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{a\mathrm{e}}$.

Lorsque $a > \dfrac{2}{\mathrm{e}}$ le critère de d'Alembert permet de conclure : $\lim \|f - \mathrm{P}_n\|_\infty = 0$ donc (P_n) converge uniformément vers f sur $[-1,1]$.

Partie IV. Calcul pratique du polynôme d'interpolation

Question 13. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{P}(x_i) = \mathrm{Q}(x_i) = f(x_i)$ donc $\mathrm{S}(x_i) = f(x_i)$. On a $\mathrm{Q}(a) = f(a)$ donc $\mathrm{S}(a) = f(a)$, et $\mathrm{P}(b) = f(b)$ donc $\mathrm{S}(b) = f(b)$. Sachant que P et Q sont de degré inférieurs ou égaux à n, le polynôme S est de degré inférieur ou égal à $n+1$ et d'après la question 2 on peut en déduire que S interpole f aux points $a, b, x_1, \dots, x_n$.

Question 14. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

– Si $n = 1$ on a $L(x) = f(x_0)\dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ donc le coefficient du terme de degré n vaut $\dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f_1[x_0, x_1]$.

– Si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis au rang $n - 1$, et notons P le polynôme d'interpolation de f en $x_0, \dots, x_{n-1}$ et Q celui de f en $x_1, \dots, x_n$.

  D'après la question 13, $L(x) = \dfrac{(x - x_n)P(x) - (x - x_0)Q(x)}{x_0 - x_n}$ donc le coefficient du terme de degré n vaut $\dfrac{u - v}{x_0 - x_n}$ où u et v désignent respectivement les coefficients des termes de degré $n - 1$ de P et Q. Or par hypothèse de récurrence $u = f_{n-1}[x_0, \dots, x_{n-1}]$ et $v = f_{n-1}[x_1, \dots, x_n]$ donc $\dfrac{u - v}{x_0 - x_n} = f_n[x_0, \dots, x_n]$: la récurrence se propage.

Question 15. Un polynôme d'interpolation et donc ses coefficients sont invariants lorsqu'on permute $x_0, \dots, x_n$ donc d'après la question précédente, $f_n[x_0, \dots, x_n]$ est invariant par permutation des x_i.

Question 16. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

– Si $n = 1$ on a $L(x) = f(x_0)\dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = f(x_0) + (x - x_0)\dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f_0[x_0] + f_1[x_0, x_1](x - x_0)$.

– Si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis au rang $n - 1$, et notons P le polynôme d'interpolation de f en $x_0, \dots, x_{n-1}$. Par hypothèse de récurrence on a $P(x) = f_0[x_0] + f_1[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f_{n-1}[x_0, \dots, x_{n-1}](x - x_0) \cdots (x - x_{n-2})$.

  Le polynôme $L - P$ est de degré inférieur ou égal à n et s'annule en $x_0, \dots, x_{n-1}$. Il existe donc une constante λ telle que $L(x) - P(x) = \lambda(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$. En écrivant $L(x) = P(x) + \lambda(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$ on constate, puisque $\deg P \leqslant n - 1$, que λ est le coefficient du terme de degré n dans L. D'après la question 14 on a donc $\lambda = f_n[x_0, \dots, x_n]$ et ainsi $L(x) = f_0[x_0] + f_1[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f_n[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$; la récurrence se propage.

Question 17.

a) On a $t_{0,j} = f_0[x_j] = f(x_j)$ et pour $i \geqslant 1$, $t_{i,j} = \dfrac{f_{i-1}[x_j, \dots, x_{j+i-1}] - f_{i-1}[x_{j+1}, \dots, x_{j+i}]}{x_j - x_{j+i}} = \dfrac{t_{i-1,j} - t_{i-1,j+1}}{x_j - x_{j+i}}$.

b) Ces formules permettent de remplir le tableau `T` ligne par ligne :

```python
def differencesDivisees(X, Y):
    n = len(X) - 1
    T = [[None for j in range(n+1-i)] for i in range(n+1)]
    for j in range(n+1):
        T[0][j] = Y[j]
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(n+1-i):
            T[i][j] = (T[i-1][j] - T[i-1][j+1]) / (X[j] - X[j+i])
    return T
```

Question 18. Pour utiliser la formule de la question 16 on a besoin des valeurs $f_i[x_0, \dots, x_i] = t_{i,0}$ qui se trouvent dans la première colonne de `T` :

```python
def lagrange(X, Y, x):
    T = differencesDivisees(X, Y)
    s = 0
    p = 1
    for i in range(len(X)):
        s += T[i][0] * p
        p *= x - X[i]
    return s
```