Accélération de la convergence d'une suite (ESSEC 2001)

Durée : libre

On étudie dans ce problème la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$. Dans la partie I on détermine la limite S de la suite (S_n). Dans les parties II et III on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de (S_n) vers S.

Partie I.

On considère pour tout nombre entier $p \geqslant 0$ les deux intégrales suivantes :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2p}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (\cos t)^{2p}\,\mathrm{d}t.$$

Question 1.

a) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$:

$$t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin t.$$

b) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $p \geqslant 0$:

$$0 \leqslant J_p \leqslant \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1}).$$

c) Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p en intégrant par parties l'intégrale I_{p+1}.

d) Déduire des résultats précédents que $\frac{J_p}{I_p}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

Question 2.

a) Exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1}, en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_p $(p \geqslant 1)$.

b) En déduire la relation suivante pour $p \geqslant 1$:

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.$$

c) Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

Partie II.

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling.
On désigne par :

- E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
- f_k la fonction de E définie pour tout nombre entier naturel k par :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} \quad \text{pour } k \geqslant 1.$$

- Δ l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie pour $x > 0$ par :

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Question 3.

a) Établir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b) Établir pour toute fonction f appartenant à E la convergence de la série $\sum(\Delta f)(p)$ avec $p \geqslant 1$ et calculer pour tout nombre entier naturel n les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}(\Delta f)(p) \qquad \text{et} \qquad \sum_{p=n+1}^{+\infty}(\Delta f)(p).$$

c) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geqslant 1$.

d) Établir pour tout nombre entier naturel $k \geqslant 1$ la convergence de la série $\sum f_k(p)$ et vérifier, pour tout nombre entier naturel n, que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}.$$

Question 4.

a) Établir la relation suivante pour $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!f_k(p) = \frac{q!}{p}f_q(p).$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}\frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)} \leqslant \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}.$$

c) En déduire, l'entier $q \geqslant 1$ étant fixé, une suite $(\mathrm{S}'_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres rationnels telle que :

$$0 \leqslant \frac{\pi^2}{6} - \mathrm{S}'_n \leqslant \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}.$$

Expliciter S'_n et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Définir en Python deux fonctions définissant respectivement S_n et S'_n pour $q = 2$ en fonction de n.

À l'aide de votre calculatrice, comparer la qualité de l'approximation de $\dfrac{\pi^2}{6}$ par S_{10} et par S'_{10} (toujours pour $q = 2$).

Partie III.

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S en effectuant un développement asymptotique de S_n suivant les puissances de $\dfrac{1}{n}$.

Question 5. Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{p=1}^{n}\frac{u_{n-p}}{p!} = 0 \quad \text{pour tout nombre entier } n \geqslant 2.$$

Établir que les u_n sont rationnels et donner u_1, u_2, u_3, u_4 sous forme de fraction irréductible.

Question 6.

a) On considère la suite de polynômes (U_n) définie par :

$$\mathrm{U}_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}_n(x) = \sum_{p=0}^{n}\frac{u_{n-p}x^p}{p!} \quad \text{pour tout nombre entier } n \geqslant 1.$$

Préciser U_1, U_2, U_3, U_4.

Montrer que $\mathrm{U}'_n = \mathrm{U}_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ et $\mathrm{U}_n(0) = \mathrm{U}_n(1)$ pour $n \geqslant 2$.

b) On considère une suite de polynômes (V_n) définie par :

$$\mathrm{V}_0 = 1, \qquad \mathrm{V}_n' = \mathrm{V}_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}_n(0) = \mathrm{V}_n(1) \text{ pour } n \geqslant 2.$$

Établir que $\mathrm{V}_n^{(p)}(0) = \mathrm{V}_{n-p}(0)$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$ et en déduire la formule suivante :

$$\mathrm{V}_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\mathrm{V}_{n-p}(0)x^p}{p!}.$$

Établir la formule suivante pour tout nombre entier $n \geqslant 2$:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\mathrm{V}_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

Démontrer alors que $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n$ pour tout nombre entier naturel n.

c) En déduire l'égalité : $\mathrm{U}_n(x) = (-1)^n \mathrm{U}_n(1-x)$ pour tout nombre entier naturel n.
Montrer alors que $u_{2p+1} = 0$ si $p \geqslant 1$.

Question 7.

a) Établir pour $p \geqslant 1$ la relation suivante, d'abord en supposant $q = 0$, puis $q \geqslant 1$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{q} (2k)!u_{2k}\left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}}\right) = (2q+2)! \int_0^1 \frac{\mathrm{U}_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}}\,\mathrm{d}x.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$:

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{(2q+1)!\mathrm{M}_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

où M_{2q+1} désigne le maximum de la fonction continue $x \mapsto |\mathrm{U}_{2q+1}(x)|$ sur le segment $[0,1]$.

c) En déduire, l'entier $q \geqslant 1$ étant fixé, une suite $(\mathrm{S}_n'')_{n \geqslant 1}$ de nombres rationnels vérifiant :

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - \mathrm{S}_n'' \right| \leqslant \frac{(2q+1)!\mathrm{M}_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

Expliciter S_n'' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Définir en Python une fonction définissant S_n'' pour $q = 2$ en fonction de n, et préciser la qualité de l'approximation de $\dfrac{\pi^2}{6}$ par S_{10}'' (toujours pour $q = 2$).