Idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (d'après ESIM MP 2002)

Durée : libre

Notations et définitions

- n et p étant deux entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On conviendra d'identifier l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^p$.
- Lorsque A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on appelle *noyau* de A, noté Ker A, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$:

$$\operatorname{Ker} A = \left\{x \in \mathbb{R}^p \;\middle|\; Ax = 0\right\}$$

  et *image* de A, notée Im A, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{Im} A = \left\{Ax \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^p\right\}$$

- Deux éléments A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont dits *équivalentes* lorsqu'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q carrée inversible d'ordre n telles que $B = QAP$.
- On appelle *idéal à droite* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une partie $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes :
  (i) la matrice nulle 0 appartient à $\mathcal{J}$;
  (ii) Si A et B appartiennent à $\mathcal{J}$ alors $A + B$ appartient à $\mathcal{J}$;
  (iii) Si A appartient à $\mathcal{J}$ et M à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors AM appartient à $\mathcal{J}$.
- On appelle *idéal à gauche* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une partie $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes :
  (i) la matrice nulle 0 appartient à $\mathcal{J}$;
  (ii) Si A et B appartiennent à $\mathcal{J}$ alors $A + B$ appartient à $\mathcal{J}$;
  (iii) Si A appartient à $\mathcal{J}$ et M à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors MA appartient à $\mathcal{J}$.
- Enfin, si $\mathcal{J}$ est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite on dit que $\mathcal{J}$ est un *idéal bilatère* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I. Un résultat préliminaire

Question 1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r, et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme associé à A pour la base canonique (b) de $\mathbb{R}^n$. Justifier l'existence de deux bases (e) et (e') de $\mathbb{R}^n$ telles que $\operatorname{Mat}_{(e,e')}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, où $I_r \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ désigne la matrice identité, et en déduire que les matrices A et $\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$ sont équivalentes.

Question 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r, et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale pour laquelle r éléments de la diagonale sont égaux à 1, et $n - r$ à 0. Montrer que A et D sont équivalentes.

Application

On considère une application non constante $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(AB) = f(A)f(B)$$

Question 3. Si O_n désigne la matrice nulle et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $f(O_n) = 0$ et $f(I_n) = 1$.

Question 4. Montrer que pour toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) \neq 0$.

Question 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang $r < n$. Justifier l'existence de $r + 1$ matrices, notées $A_0, A_1, \dots, A_r$, toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_0 A_1 \cdots A_r$ soit nul, et en déduire que $f(A) = 0$.

Question 6. Donner un exemple d'une telle application f.

Partie II. Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans toute cette partie on note $\mathcal{J}$ un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *non réduit à la seule matrice nulle.*

Question 7.

a) Montrer que si $\mathrm{I}_n \in \mathcal{J}$ alors $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que si $\mathcal{J}$ contient une matrice inversible alors $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice non nulle A de $\mathcal{J}$ de rang $r \in [\![1, n]\!]$.

Question 8. Montrer que $\mathcal{J}$ contient la matrice $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)$.

Question 9. Montrer l'existence de $n-r+1$ matrices $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_{n-r}$ toutes équivalentes à A, telles que la somme $\mathrm{A}_1 + \cdots + \mathrm{A}_{n-r+1}$ soit une matrice inversible.

Question 10. Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Partie III. Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Question 11. Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $\mathcal{J}_{\mathrm{H}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$\mathcal{J}_{\mathrm{H}} = \left\{ \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \operatorname{Im} \mathrm{A} \subset \mathrm{H} \right\}$$

Montrer que $\mathcal{J}_{\mathrm{H}}$ est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 12. Soient u une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, v une application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u$.

a) On fixe un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} u$ dans $\mathbb{R}^p$.
Soit $(e_1, \dots, e_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$. Justifier l'existence, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, d'un unique élément ε_i de S tel que $u(\varepsilon_i) = v(e_i)$.

b) En déduire l'existence d'une application linéaire w de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $v = u \circ w$.

Question 13. Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\operatorname{Im} \mathrm{C} \subset \operatorname{Im} \mathrm{A} + \operatorname{Im} \mathrm{B}$.

a) On désigne par $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont les n première colonnes sont celles de A et les n dernières celles de B. Montrer que $\operatorname{Im} \mathrm{D} = \operatorname{Im} \mathrm{A} + \operatorname{Im} \mathrm{B}$.

b) En déduire l'existence d'une matrice $\mathrm{W} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{C} = \mathrm{DW}$. *Indication : utiliser la question 12.*

c) Prouver alors l'existence de deux matrices U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{C} = \mathrm{AU} + \mathrm{BV}$.

Question 14. Soit $\mathcal{J}$ un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Justifier l'existence d'un entier naturel r et d'une matrice $\mathrm{M}_0 \in \mathcal{J}$ telle que :

- pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{J}$, $\operatorname{rg} \mathrm{M} \leqslant r$;
- $\operatorname{rg} \mathrm{M}_0 = r$.

b) Soit M un élément quelconque de $\mathcal{J}$. On suppose que $\operatorname{Im} \mathrm{M}$ n'est pas contenu dans $\operatorname{Im} \mathrm{M}_0$.
À l'aide du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} \mathrm{M} + \operatorname{Im} \mathrm{M}_0$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'existence d'un élément de $\mathcal{J}$ de rang strictement supérieur à r, et en déduire que $\mathcal{J}$ est inclus dans $\mathcal{J}_{\operatorname{Im} \mathrm{M}_0}$.

c) Prouver enfin que $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\operatorname{Im} \mathrm{M}_0}$.

Partie IV. Idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Question 15. Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. ON désigne par $\mathcal{J}^{\mathrm{H}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$\mathcal{J}^{\mathrm{H}} = \left\{ \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathrm{H} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{A} \right\}$$

Montrer que $\mathcal{J}^{\mathrm{H}}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 16. Soient u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, v une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$. On suppose que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$.
Montrer qu'il existe une application linéaire w de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que $v = w \circ u$.

Question 17. Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $\operatorname{Ker} \mathrm{A} \cap \operatorname{Ker} \mathrm{B} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{C}$.
Montrer l'existence de deux matrices U, V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{C} = \mathrm{UA} + \mathrm{VB}$.

Question 18. Déterminer les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

♦ ♦
♦