Corrigé : idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (d'après ESIM MP 2002)

Partie I. Un résultat préliminaire

Question 1. Soit H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{H} = n - \dim(\operatorname{Ker} u) = \operatorname{rg} u = r$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H, $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} u$. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
Posons maintenant $e'_1 = u(e_1)$, …, $e'_r = u(e_r)$. D'après la forme géométrique du théorème du rang, la famille $(e'_1, \dots, e'_r)$ est libre donc peut être complétée pour former une base $(e'_1, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
On a alors $\operatorname{Mat}_{e,e'}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)$.
Notons enfin $\mathrm{P} = \operatorname{Mat}_{(e)}(b)$ la matrice de passage de (e) vers (b) et $\mathrm{Q} = \operatorname{Mat}_{(b)}(e')$ la matrice de passage de (b) vers (e'). D'après la formule de changement de base pour les applications linéaires, $\mathrm{A} = \operatorname{Mat}_{(b)}(u) = \mathrm{Q}\operatorname{Mat}_{e,e'}(u)\mathrm{P}$ donc les matrices A et $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)$ sont équivalentes.

Question 2. La question précédente montre que deux matrices A et A′ de même rang r sont toutes deux équivalentes à $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)$: il existe $\mathrm{P}, \mathrm{P}', \mathrm{Q}, \mathrm{Q}'$ inversibles telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)\mathrm{Q}$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{P}'\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)\mathrm{Q}'$.
Alors $\mathrm{A}' = \mathrm{P}'\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Q}$ donc A′ est équivalente à A. Nous avons ainsi montré que deux matrices de même rang sont équivalentes.
Or une matrice diagonale D pour laquelle r éléments diagonaux sont égaux à 1 et $n - r$ à 0 est de rang r, donc A et D sont équivalentes.

Application

Question 3. Pour $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{O}_n$ on a $f(\mathrm{O}_n) = f(\mathrm{O}_n)^2$ donc $f(\mathrm{O}_n) \in \{0, 1\}$. Mais si on avait $f(\mathrm{O}_n) = 1$ alors pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque et $\mathrm{B} = \mathrm{O}_n$ on aurait $f(\mathrm{O}_n) = f(\mathrm{A})f(\mathrm{O}_n)$ soit $f(\mathrm{A}) = 1$ et f serait constante, ce qui n'est pas. Donc $f(\mathrm{O}_n) = 0$.

Pour $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{I}_n$ on a $f(\mathrm{I}_n) = f(\mathrm{I}_n)^2$ donc $f(\mathrm{I}_n) \in \{0, 1\}$. Mais si on avait $f(\mathrm{I}_n) = 0$ alors pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} = \mathrm{I}_n$ on aurait $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{A})f(\mathrm{I}_n) = 0$ et f serait constante, ce qui n'est pas. Donc $f(\mathrm{I}_n) = 1$.

Question 4. Supposons l'existence d'une matrice inversible A telle que $f(\mathrm{A}) = 0$. Alors pour $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$ on aurait $f(\mathrm{I}_n) = f(\mathrm{A})f(\mathrm{A}^{-1}) = 0$, ce qui n'est pas. Donc pour toute matrice inversible A on a $f(\mathrm{A}) \neq 0$.

Question 5. Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$ notons $\mathrm{A}_k = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{r-k \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$.

D'après la question 2 toutes ces matrices sont équivalentes à A, et $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 \cdots \mathrm{A}_r = 0$: en effet, pour tout $i \in [\![1, r+1]\!]$, une de ces matrices a un coefficient diagonal de rang i égal à 0, et pour tout $i \geqslant r + 2$ toutes ces matrices ont leur coefficient de rang i égal à 0.
On a $f(\mathrm{A}_0)f(\mathrm{A}_1)\cdots f(\mathrm{A}_r) = f(\mathrm{O}_n) = 0$ donc il existe $k \in [\![0, r]\!]$ tel que $f(\mathrm{A}_k) = 0$. Mais A_k est équivalente à A donc il existe P, Q inversibles telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{A}_k\mathrm{Q}$ et alors $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{P})f(\mathrm{A}_k)f(\mathrm{Q}) = 0$.

Question 6. Nous avons montré que si A est inversible alors $f(\mathrm{A}) \neq 0$, et si A n'est pas inversible alors $f(\mathrm{A}) = 0$. C'est par exemple le cas de la fonction $f = \det$, qui n'est pas constante et vérifie $\det(\mathrm{AB}) = (\det \mathrm{A})(\det \mathrm{B})$.

Partie II. Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Question 7.

a) Si $\mathrm{I}_n \in \mathcal{J}$ on applique la propriété (iii) des idéaux à droite pour obtenir : $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{I}_n\mathrm{M} = \mathrm{M} \in \mathcal{J}$, et ainsi $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Supposons l'existence d'une matrice inversible A dans $\mathcal{J}$. En appliquant la propriété (iii) des idéaux à droite avec $\mathrm{M} = \mathrm{A}^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on obtient $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_n \in \mathcal{J}$, et d'après la question précédente, ceci implique $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 8. D'après la question 1 il existe P et Q inversibles telles que $\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) = PAQ$.
D'après la propriété (iii) des idéaux à droite on a $AQ \in \mathcal{J}$, puis d'après la propriété (iii) des idéaux à gauche on a $P(AQ) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \in \mathcal{J}$.

Question 9. Pour tout $k \in [\![0, n-r]\!]$, posons $A_k = \mathrm{diag}(\underbrace{0,\dots,0}_{k \text{ fois}}, \underbrace{1,\dots,1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0,\dots,0}_{r-k \text{ fois}})$. D'après la question 2 toutes ses matrices sont équivalentes à A, et leur somme est une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont non nuls, donc inversible.

Question 10. Comme à la question 8, chacune de ces matrices A_k appartient à $\mathcal{J}$. D'après la propriété (ii) des idéaux (à gauche ou à droite) leur somme $A_1 + \cdots + A_k$ est élément de $\mathcal{J}$, et s'agissant d'une matrice inversible, la question 7 nous apprend que $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En conclusion, nous avons montré que les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie III. Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Question 11. La matrice nulle appartient à $\mathcal{J}_H$ car $\mathrm{Im}\, 0 = \{0\} \subset H$.
On a $\mathrm{Im}(A+B) \subset \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$ et si A et B sont dans $\mathcal{J}_H$ alors $\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B \subset H$ donc $A + B \in \mathcal{J}_H$.
Enfin, on a $\mathrm{Im}(AM) \subset \mathrm{Im}\, A$ donc si $A \in \mathcal{J}_H$ alors $AM \in \mathcal{J}_H$.
On a bien montré que $\mathcal{J}_H$ est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 12.

a) Pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $v(e_i) \in \mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Im}\, u$ donc il existe $x_i \in \mathbb{R}^p$ tel que $u(x_i) = v(e_i)$.
Décomposons x_i suivant la somme directe $\mathbb{R}^p = S \oplus \mathrm{Ker}\, u$: $x_i = \varepsilon_i + y_i$ avec $\varepsilon_i \in S$ et $y_i \in \mathrm{Ker}\, u$. Alors $v(e_i) = u(x_i) = u(\varepsilon_i)$.
Supposons maintenant l'existence d'un autre $\varepsilon'_i \in S$ tel que $u(\varepsilon'_i) = v(e_i)$. Alors $u(\varepsilon_i - \varepsilon'_i) = 0$ donc $\varepsilon_i - \varepsilon'_i \in \mathrm{Ker}\, u$. Mais par ailleurs $\varepsilon_i - \varepsilon'_i \in S$ et la somme $S \oplus \mathrm{Ker}\, u$ étant directe, on en déduit $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$. Ce dernier vecteur est bien unique.

b) On définit une application linéaire w de $\mathbb{R}^q$ vers $\mathbb{R}^p$ en posant : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $w(e_i) = \varepsilon_i$. Ainsi on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v(e_i) = u \circ w(e_i)$. Les deux applications linéaires v et $u \circ w$ coïncident sur une base, elles sont égales.

Question 13.

a) Tout vecteur X de $\mathbb{R}^{2n}$ s'écrit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$. Le calcul par blocs donne $DX = AX_1 + BX_2$ donc $\mathrm{Im}\, D = \left\{ AX_1 + BX_2 \;\middle|\; X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n \right\} = \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.

b) Considérons l'application linéaire u de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques est égale à D, et l'application linéaire v de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est C. L'inclusion $m C \subset \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B = \mathrm{Im}\, D$ se traduit par $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Im}\, u$ donc la question 12 s'applique : il existe une application linéaire w de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $v = u \circ w$.
En notant $W \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ la matrice associée à w pour les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{2n}$ cette égalité se traduit matriciellement par $C = DW$.

c) Posons $W = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ avec $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs donne : $C = DW = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = AU + BV$.

Question 14.

a) L'ensemble $\left\{ \mathrm{rg}\, M \;\middle|\; M \in \mathcal{J} \right\}$ est un ensemble d'entiers non vide et majoré par n donc possède un plus grand élément r.

b) Posons $H = \mathrm{Im}\, M + \mathrm{Im}\, M_0$, et considérons par exemple la matrice C dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ d'une projection vectorielle sur H (en fait toute application linéaire dont l'image est égale à H convient).
On a $\mathrm{Im}\, C = H \subset \mathrm{Im}\, M + \mathrm{Im}\, M_0$ donc d'après la question 13 il existe U, V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $C = MU + M_0 V$. Puisque $\mathcal{J}$ est un idéal à droite, on a $C \in \mathcal{J}$. Mais $\mathrm{rg}\, C = \dim(\mathrm{Im}\, M + \mathrm{Im}\, M_0) > \dim(\mathrm{Im}\, M_0) = r$ car $\mathrm{Im}\, M$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Im}\, M_0$. Ceci contredit la définition de l'entier r, donc l'hypothèse de départ est fausse et $\mathrm{Im}\, M \subset \mathrm{Im}\, M_0$.
Ainsi, nous avons prouvé que $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_{\mathrm{Im}\, M_0}$.

c) Réciproquement, Soit $A \in \mathcal{J}_{\mathrm{Im}\, M_0}$. On a $\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Im}\, M_0 = \mathrm{Im}\, M_0 + \mathrm{Im}\, 0$ donc d'après la question 13 il existe deux matrices U et V telles que $A = M_0 U + 0V = M_0 U$ et puisque $M_0 \in \mathcal{J}$ on peut en déduire que $A \in \mathcal{J}$.
Ainsi, nous avons prouvé dans cette partie que les idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont de la forme $\mathcal{J}_H$ où H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Partie IV. Idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Question 15. La matrice nulle appartient à $\mathcal{J}^{\mathrm{H}}$ car $\mathrm{H} \subset \mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} 0$.
On a $\operatorname{Ker} \mathrm{A} \cap \operatorname{Ker} \mathrm{B} \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ donc si A et B sont dans $\mathcal{J}^{\mathrm{H}}$ alors $\mathrm{H} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{A} \cap \operatorname{Ker} \mathrm{B} \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ et ainsi $\mathrm{A}+\mathrm{B} \in \mathcal{J}^{\mathrm{H}}$.
Enfin, on a $\operatorname{Ker} \mathrm{A} \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{MA})$ donc si $\mathrm{A} \in \mathcal{J}^{\mathrm{H}}$ alors $\mathrm{MA} \in \mathcal{J}^{\mathrm{H}}$.
On a bien montré que $\mathcal{J}^{\mathrm{H}}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 16. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans $\mathbb{R}^n$, $(e_1,\dots,e_r)$ une base de S, $(e_{r+1},\dots,e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} u$.
Posons $e'_1 = u(e_1)$, …, $e'_r = u(e_r)$. D'après la forme géométrique du théorème du rang la famille $(e'_1,\dots,e'_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$, que l'on peut compléter pour former une base $(e'_1,\dots,e'_r,e'_{r+1},\dots,e'_p)$ de $\mathbb{R}^p$.
On définit alors une application w de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ en posant : $\forall k \in [\![1,r]\!]$, $w(e'_k) = v(e_k)$ et pour tout $k \in [\![r+1,p]\!]$, $w(e'_k) = 0$.
Alors pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $v(e_k) = w \circ u(e_k)$ et pour tout $k \in [\![r+1,n]\!]$, $e_k \in \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$ donc $v(e_k) = 0 = w \circ u(e_k)$. Les deux applications linéaires v et $w \circ u$ coïncident sur une base donc $v = w \circ u$.

Question 17. Considérons la matrice $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ obtenue en juxtaposant les matrices A et B : $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{pmatrix}$. Pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{DX} = \begin{pmatrix} \mathrm{AX} \\ \mathrm{BX} \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{Ker} \mathrm{D} = \operatorname{Ker} \mathrm{A} \cap \operatorname{Ker} \mathrm{B}$.
Notons u l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ dont la matrice dans les bases canoniques est D, et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est C.
On a $\operatorname{Ker} \mathrm{D} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{C}$ donc $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$, et d'après la question précédente il existe une application linéaire w de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $v = w \circ u$. En notant $\mathrm{W} \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$ la matrice associée à w pour les bases canoniques on a $\mathrm{C} = \mathrm{WD}$.
Il reste à poser $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & \mathrm{V} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour traduire l'égalité : $\mathrm{C} = \mathrm{WD} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & \mathrm{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{pmatrix} = \mathrm{UA} + \mathrm{VB}$.

Question 18. Soit $\mathcal{J}$ un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, posons $s = \min\left\{\dim(\operatorname{Ker} \mathrm{M}) \mid \mathrm{M} \in \mathcal{J}\right\}$ et notons M_0 un élément de $\mathcal{J}$ tel que $\dim(\operatorname{Ker} \mathrm{M}_0) = s$.
Considérons un élément M de $\mathcal{J}$.
Soit C la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont le noyau est égal à $\operatorname{Ker} \mathrm{M} \cap \operatorname{Ker} \mathrm{M}_0$. On a $\operatorname{Ker} \mathrm{C} = \operatorname{Ker} \mathrm{M} \cap \operatorname{Ker} \mathrm{M}_0$ donc d'après la question précédente il existe U et V dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathrm{C} = \mathrm{UM}_0 + \mathrm{VM}$ et par définition d'un idéal à gauche, ceci entraîne $\mathrm{C} \in \mathcal{J}$.
Par définition de s on a $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{C} = \dim \operatorname{Ker} \mathrm{M} \cap \operatorname{Ker} \mathrm{M}_0 \geqslant s = \dim \operatorname{Ker} \mathrm{M}_0$, ce qui implique $\operatorname{Ker} \mathrm{M}_0 \subset \operatorname{Ker} \mathrm{M}$. Ainsi, nous avons prouvé que $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}^{\operatorname{Ker} \mathrm{M}_0}$.
Réciproquement, soit $\mathrm{A} \in \mathcal{J}^{\operatorname{Ker} \mathrm{M}_0}$. On a $\operatorname{Ker} \mathrm{M}_0 \cap \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Ker} \mathrm{M}_0 \subset \operatorname{Ker} \mathrm{A}$ donc d'après la question 17 il existe U et V dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathrm{A} = \mathrm{UM}_0 + \mathrm{V}0 = \mathrm{UM}_0$ et par définition d'un idéal à gauche, $\mathrm{A} \in \mathcal{J}$.
Ainsi, $\mathrm{J} = \mathrm{J}^{\operatorname{Ker} \mathrm{M}_0}$ et nous avons prouvé que les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont tous de la forme $\mathcal{J}^{\mathrm{H}}$ où H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.