L'opérateur des différences finies (d'après EPITA 2010)

Durée : quatre heures

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On note Δ l'*opérateur des différences finies*, qui est défini sur $\mathbb{R}[X]$, à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$, par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \qquad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

On pose $\Delta^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $\Delta^k = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{k \text{ fois}}$.
Ce problème se propose d'étudier cet endomorphisme Δ et certaines de ses applications.

Partie I. Étude de l'endomorphisme Δ

On définit la famille de polynômes réels $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $H_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$H_n(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$$

Question 1. La famille $(H_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$.

a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$; on distinguera les cas $0 \leqslant k < n$, $k \geqslant n$ et $k < 0$.
En déduire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, ainsi que sa décomposition dans la base $(H_0, \dots, H_n)$: $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(*i*) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$;

(*ii*) $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

Indication : pour montrer le sens $(i) \implies (ii)$ on pourra raisonner par récurrence sur l'entier i et remarquer que i est racine des polynômes $H_{i+1}, \dots, H_n$.

Question 2. Étude de l'endomorphisme Δ.

a) Établir que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Calculer $\Delta(H_0)$, puis $\Delta(H_{n+1})$ en fonction de H_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On considère un polynôme non nul P de degré d. Préciser le degré du polynôme $\Delta(P)$, et donner $\Delta^{d+1}(P)$.

d) Préciser le noyau de Δ. Δ est-il injectif ? surjectif ?

e) On note Δ_n la restriction de Δ au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Δ_n est-il injectif ? surjectif ?
Écrire la matrice associée à Δ_n dans la base $(H_0, \dots, H_n)$.

Question 3. Expression d'un polynôme dans la base (H_n) de $\mathbb{R}[X]$.

a) Soient k et n dans $\mathbb{N}$. Calculer $\Delta^k(H_n)$ (on distinguera les cas $k < n$, $k = n$ et $k > n$) et en déduire que $\Delta^k H_n(0) = \delta_{k,n}$, où $\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b) En déduire pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ la formule suivante : $P(X) = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i P(0) H_i(X)$.

Partie II. Approximation des dérivées n-ièmes par différences finies

Question 4. Puissances de l'endomorphisme Δ.
Établir la formule suivante pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Delta^n P(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j)$$

Question 5. Application au calcul de différentes sommes.

a) En s'intéressant au coefficient dominant dans la décomposition de X^n dans la base $(H_0, \ldots, H_n)$, déterminer $\Delta^n(X^n)$, et en déduire la formule suivante :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^n = n!$$

b) Démontrer que pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k < n$ on a :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k = 0$$

Question 6. Approximation d'une dérivée n-ième par différences finies.

On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ainsi qu'un point $a \in \mathbb{R}$ et deux entiers m et n tels que $1 \leqslant n \leqslant m$. On pose alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \qquad A_n(h) = \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(a + jh)$$

a) Exprimer $f(a+h)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre n en a.
Quelle formules en déduit-on pour $f(a+jh)$, où $0 \leqslant j \leqslant n$, en changeant h en jh ?

b) En déduire que l'expression $h^n A_n(h)$ admet un développement limité à l'ordre n quand h tend vers 0, et préciser les coefficients de h^j $(0 \leqslant j < n)$ et de h^n dans celui-ci.
Quelle est la limite de $A_n(h)$ quand h tend vers 0 ?

Question 7. Caractérisation des suites polynomiales.

a) On considère la décomposition d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base (H_k) : $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$. Établir que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} P(j)$. Si $i \geqslant n+1$, que vaut la somme $\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} P(j)$?

b) Soit (u_n) une suite réelle. Démontrer l'équivalence entre les deux conditions suivantes :

(a) il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $u_j = P(j)$;

(b) il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geqslant n+1$, $\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} u_j = 0$.

Partie III. Calcul de la somme des puissances des n premiers entiers

Question 8. Étude de séries télescopiques.

a) Établir la formule suivante pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R = \Delta Q$:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} R(k) = Q(p+1) - Q(0).$$

b) Exprimer les polynômes X, X^2 et X^3 dans la base (H_n).
En déduire les polynômes Q_1, Q_2 et Q_3 vérifiant $\Delta Q_1 = X$, $\Delta Q_2 = X^2$, $\Delta Q_3 = X^3$.

c) Donner alors, en le justifiant, les expressions factorisées des sommes $\sum_{k=0}^{p} k$, $\sum_{k=0}^{p} k^2$ et $\sum_{k=0}^{p} k^3$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Question 9. Recherche d'une suite de polynômes (B_n) vérifiant $\Delta B_{n+1} = X^n$.

Afin de généraliser le calcul précédent, on recherche une suite de polynômes $(B_n)_{n \geqslant 1}$ tels que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\Delta B_{n+1} = X^n$.

a) Montrer, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la relation $(\Delta P)' = \Delta(P')$.

b) Établir, *si une telle suite de polynômes* (B_n) *existe*, qu'alors :

- pour tout $n \geqslant 1$, $B'_{n+1} - nB_n \in \operatorname{Ker} \Delta$;
- pour tout $n \geqslant 1$, $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$;
- le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

c) Inversement, établir par récurrence qu'une suite (B_n) satisfaisant ces trois conditions vérifie $\Delta B_{n+1} = X^n$ et qu'on a alors $\sum_{k=0}^{p} k^n = B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(0)$ pour tout entier naturel p.

On recherche en particulier une suite de polynômes (B_n) vérifiant les conditions suivantes :

(i) pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{B}'_{n+1} = n\mathrm{B}_n$;

(ii) pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{B}_{n+1}(1) = \mathrm{B}_{n+1}(0)$;

(iii) le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

Question 10. Existence, unicité et construction de la suite (B_n).

a) Vérifier que les conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes aux conditions suivantes :

(1) pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{B}'_{n+1} = n\mathrm{B}_n$;

(2) pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$;

(3) le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

b) Déterminer les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4, et retrouver ainsi les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^3$.

c) Établir alors l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie les trois conditions (1), (2) et (3) définies ci-dessus, et montrer qu'on a : $\forall n \geqslant 1$, $\mathrm{B}_n \in \mathbb{Q}[X]$.