Corrigé : l'opérateur des différences finies (EPITA 2010)

Partie I. Étude de l'endomorphisme Δ

Question 1.

a) La famille $(\mathrm{H}_0,\dots,\mathrm{H}_n)$ est échelonnée en degré donc forme une famille libre. Tous ses éléments sont dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et il y en a $n+1=\dim\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ donc cette famille libre est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b) Si $0\leqslant n<k$ alors $\mathrm{H}_n(k)=0$.

Si $k\leqslant n$ et $n>0$, $\mathrm{H}_n(k)=\dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}=\dfrac{k!}{(k-n)!n!}=\dbinom{k}{n}$, formule qui reste vraie pour $n=0$ (et donc $k=0$).

Si $k<0$, posons $j=-k$. Alors $\mathrm{H}_n(k)=\mathrm{H}_n(-j)=\dfrac{(-j)(-j-1)\cdots(-j-n+1)}{n!}=(-1)^n\dfrac{j(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!}=(-1)^n\dfrac{(j+n-1)!}{n!(j-1)!}=(-1)^n\dbinom{j+n-1}{n}=(-1)^n\dbinom{n-k-1}{n}$.

Un coefficient binomial est toujours entier, donc nous avons montré que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{H}_n(k)\in\mathbb{Z}$.

c) Supposons l'assertion (ii) vérifiée. Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{P}(k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_i\mathrm{H}_i(k)$ avec $a_i\in\mathbb{Z}$ et $\mathrm{H}_i(k)\in\mathbb{Z}$ d'après la question précédente, donc $\mathrm{P}(k)\in\mathbb{Z}$: l'assertion (i) est vérifiée.

Réciproquement, supposons l'assertion (i) vérifiée, et raisonnons par récurrence sur i.

- Si $i=0$, sachant que 0 est racine de $\mathrm{H}_1,\dots,\mathrm{H}_n$ on a $\mathrm{P}(0)=a_0\mathrm{H}_0(0)=a_0$ donc $a_0\in\mathbb{Z}$.
- Si $i>0$, supposons que $\mathrm{P}(j)\in\mathbb{Z}$ pour tout $j\in[\![0,i-1]\!]$.

  L'entier i est racine de $\mathrm{H}_{i+1},\dots,\mathrm{H}_n$ donc $\mathrm{P}(i)=\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}a_j\mathrm{H}_j(i)+a_i\mathrm{H}_i(i)$. Mais $\mathrm{H}_i(i)=1$ donc $a_i=\mathrm{P}(i)-\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}a_j\mathrm{H}_j(i)\in\mathbb{Z}$ d'après l'hypothèse de récurrence et la question précédente.

La récurrence se propage ; l'assertion (ii) est prouvée.

Question 2.

a) Pour tout $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\Delta(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})=(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(\mathrm{X}+1)-(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(\mathrm{X})=\lambda\big(\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X})\big)+\big(\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{Q}(\mathrm{X})\big)=\lambda\Delta\mathrm{P}+\Delta\mathrm{Q}$, donc Δ est linéaire ; c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

b) On a $\Delta(\mathrm{H}_0)=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\Delta(\mathrm{H}_{n+1})=\frac{(\mathrm{X}+1)\mathrm{X}\cdots(\mathrm{X}-n+1)}{(n+1)!}-\frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-n)}{(n+1)!}=\frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-n+1)}{(n+1)!}\Big((\mathrm{X}+1)-(\mathrm{X}-n)\Big)=\frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-n+1)}{n!}$$

donc $\Delta(\mathrm{H}_{n+1})=\mathrm{H}_n$.

c) Posons $\mathrm{P}=\displaystyle\sum_{k=0}^{d}a_k\mathrm{X}^k$ avec $a_d\neq0$. Alors : $\Delta\mathrm{P}=\displaystyle\sum_{k=1}^{d}a_k\big((\mathrm{X}+1)^k-\mathrm{X}^k\big)=\sum_{k=1}^{d}a_k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\mathrm{X}^j=\sum_{j=0}^{d-1}\sum_{k=j+1}^{d}a_k\binom{k}{j}\mathrm{X}^j$.

Le coefficient devant X^{d-1} est égal à $a_d\dbinom{d}{d}=a_d\neq0$ donc $\deg\Delta\mathrm{P}=d-1$.

On en déduit par récurrence que pour tout $j\in[\![1,d]\!]$, $\deg\Delta^j\mathrm{P}=d-j$. En particulier $\Delta^d\mathrm{P}$ est un polynôme constant et ainsi, $\Delta^{d+1}(\mathrm{P})=0$.

d) Pour tout polynôme P de degré $d\geqslant1$ on a $\deg\Delta\mathrm{P}=d-1\geqslant0$ donc $\Delta\mathrm{P}\neq0$. On en déduit que $\operatorname{Ker}\Delta=\mathbb{R}_0[\mathrm{X}]=\mathbb{R}$ (le sous-espace vectoriel des polynômes constants). Δ n'est donc pas injectif.

Montrons maintenant que Δ est surjectif. Considérons un polynôme $\mathrm{Q}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, ainsi que sa décomposition dans la base (H_n) : $\mathrm{Q}=\displaystyle\sum_{k=0}^{d}a_k\mathrm{H}_k$. En posant $\mathrm{P}=\displaystyle\sum_{k=0}^{d}a_k\mathrm{H}_{k+1}$ on a $\Delta\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ d'après la question 2b, donc $\mathrm{Q}\in\operatorname{Im}\Delta$: l'opérateur Δ est bien surjectif.

e) On a $\operatorname{Ker}\Delta_n = \operatorname{Ker}\Delta \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}$ donc Δ_n n'est pas injectif. Or pour un endomorphisme en dimension finie injectivité et surjectivité sont deux propriétés équivalentes, donc Δ_n n'est pas non plus surjectif.
Sachant que $\Delta H_0 = 0$ et $\Delta H_k = H_{k-1}$ pour $k \geqslant 1$ la matrice associée à Δ_n dans la base (H_k) est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Question 3.

a) D'après la question 2b on a $\Delta^k(H_n) = \begin{cases} H_{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$. Or si $j > 0$, $H_j(0) = 0$ donc si $k < n$ on a $\Delta^k H_n(0) = 0$ et si $k = n$ on a $\Delta^n H_n(0) = H_0(0) = 1$ donc on a bien $\Delta^k H_n(0) = \delta_{k,n}$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc il existe $a_0, \dots, a_n$ tels que $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$.

Par linéarité, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\Delta^j P(0) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Delta^j H_i(0) = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{i,j} = a_j$ donc on a bien $P = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i P(0) H_i$ (et cette décomposition est unique car $(H_0, \dots, H_n)$ est une base).

Partie II. Approximation des dérivées n-ièmes par différences finies

Question 4. Il est possible d'établir la formule demandée par récurrence sur n, mais une démarche plus efficiente consiste à introduire l'opérateur $\Theta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $\Theta(P) = P(X+1)$, de sorte que $\Delta = \Theta - \mathrm{Id}$.
Puisque Θ et Id commutent, on a $\Delta^n = (\Theta - \mathrm{Id})^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \Theta^j$ (formule du binôme) donc $\Delta^n P = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \Theta^j(P)$.

Or il est facile de constater que $\Theta^j(P) = P(X+j)$, donc $\Delta^n P = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j)$.

Question 5.

a) Considérons la décomposition de X^n dans la base $(H_0, \dots, H_n)$: $X^n = \sum_{j=0}^{n} a_j H_j$. Dans l'expression de droite, le coefficient de X^n est égal à $\frac{a_n}{n!}$ donc $a_n = n!$.
Mais $\Delta^n(X^n) = a_n$ d'après la question 3a donc $\Delta^n(X^n) = n!$.
Par ailleurs, d'après la question 4 on a $\Delta^n(X^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (X+j)^n$ donc en substituant à X la valeur 0 on obtient $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^n = n!$.

b) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a $\Delta^n(X^k) = 0$ donc d'après la question 4, $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (X+j)^k = 0$ et en particulier $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k = 0$ (en substituant à X la valeur 0).

Question 6.

a) D'après la formule de Taylor-Young, $f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$. En substituant à h la quantité jh on obtient :

$$f(a+jh) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{j^k f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$$

b) Ainsi, $h^n A_n(h) \underset{0}{=} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \frac{j^k f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k \Big) f^{(k)}(a) h^k + o(h^n) \underset{0}{=} f^{(n)}(a) h^n + o(h^n)$ d'après les sommes calculées en 5a et 5b. On en déduit que $A_n(h) \underset{0}{=} f^{(n)}(a) + o(1)$, autrement dit : $\lim_{0} A_n(h) = f^{(n)}(a)$.

Question 7.

a) Soit $i \leqslant n$. D'après la question 3b, $a_i = \Delta^i \mathrm{P}(0)$, et d'après la question 4, $a_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}\mathrm{P}(j)$.

Si $i \geqslant n+1$, considérons la décomposition de P dans la base $(\mathrm{H}_0, \dots, \mathrm{H}_{i+1})$: $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{i+1} b_j \mathrm{H}_j$, avec $b_j = \begin{cases} a_j & \text{si } j \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La formule précédente s'applique, et en particulier $\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}\mathrm{P}(j) = b_i = 0$.

b) L'implication $(a) \implies (b)$ résulte immédiatement de la question précédente.

Réciproquement, supposons l'existence d'un entier n tel que pour tout $i \geqslant n+1$, $\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}u_j = 0$, et posons alors pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}u_j$ puis $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{H}_i$. D'après ce qui précède nous avons défini un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ vérifiant : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $u_j = \mathrm{P}(j)$. Il reste à montrer que cette égalité se prolonge au delà du rang n.
Pour ce faire, on raisonne par récurrence sur i :

- le résultat est d'ors et déjà acquis pour $i \in [\![0, n]\!]$.
- Si $i \geqslant n+1$, supposons le résultat acquis jusqu'au rang $i-1$.
  D'après l'hypothèse (b) on a $u_i = -\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}u_j = -\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}\mathrm{P}(j)$, et la question 7a permet de conclure : $u_i = \mathrm{P}(i)$. La récurrence se propage.

Partie III. Calcul de la somme des puissances des n premiers entiers

Question 8.

a) Par télescopage, $\sum_{k=0}^{p} \mathrm{R}(k) = \sum_{k=0}^{p} \Delta\mathrm{Q}(k) = \sum_{k=0}^{p}\big(\mathrm{Q}(k+1) - \mathrm{Q}(k)\big) = \mathrm{Q}(p+1) - \mathrm{Q}(0)$.

b) On a $\mathrm{H}_0 = 1$, $\mathrm{H}_1 = \mathrm{X}$, $\mathrm{H}_2 = \dfrac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)}{2} = \dfrac{\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}}{2}$ donc $\mathrm{X}^2 = \mathrm{H}_1 + 2\mathrm{H}_2$ et $\mathrm{H}_3 = \dfrac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)}{6} = \dfrac{\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}}{6}$ donc $\mathrm{X}^3 = \mathrm{H}_1 + 6\mathrm{H}_2 + 6\mathrm{H}_3$.
Posons $\mathrm{Q}_1 = \mathrm{H}_2$; alors $\Delta\mathrm{Q}_1 = \mathrm{H}_1 = \mathrm{X}$.
Posons $\mathrm{Q}_2 = \mathrm{H}_2 + 2\mathrm{H}_3$; alors $\Delta\mathrm{Q}_2 = \mathrm{H}_1 + 2\mathrm{H}_2 = \mathrm{X}^2$.
Posons $\mathrm{Q}_3 = \mathrm{H}_2 + 6\mathrm{H}_3 + 6\mathrm{H}_4$; alors $\Delta\mathrm{Q}_3 = \mathrm{H}_1 + 6\mathrm{H}_2 + 6\mathrm{H}_3 = \mathrm{X}^3$.
Après simplification on obtient $\mathrm{Q}_1 = \dfrac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)}{2}$, $\mathrm{Q}_2 = \dfrac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(2\mathrm{X}-1)}{6}$, $\mathrm{Q}_3 = \dfrac{\mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)^2}{4}$.

c) D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\sum_{k=0}^{p} k = \mathrm{Q}_1(p+1) - \mathrm{Q}_1(0) = \frac{p(p+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{p} k^2 = \mathrm{Q}_2(p+1) - \mathrm{Q}_2(0) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^{p} k^3 = \mathrm{Q}_3(p+1) - \mathrm{Q}_3(0) = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$$

Question 9.

a) Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $(\Delta\mathrm{P})' = \mathrm{P}'(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}'(\mathrm{X}) = \Delta(\mathrm{P}')$.

b) Supposons l'existence d'une suite de polynômes (B_n) telle que $\Delta\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{X}^n$.

– On a $\Delta(\mathrm{B}'_{n+1}) = (\Delta\mathrm{B}_{n+1})' = (\mathrm{X}^n)' = n\mathrm{X}^{n-1} = n\Delta(\mathrm{B}_n)$ donc $\Delta(\mathrm{B}'_{n+1} - n\mathrm{B}_n) = 0$ soit $\mathrm{B}'_{n+1} - n\mathrm{B}_n \in \operatorname{Ker}\Delta$.

– On a $\mathrm{B}_{n+1}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{B}_{n+1}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n$ donc en substituant à X la valeur 0 on obtient pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{B}_{n+1}(1) - \mathrm{B}_{n+1}(0) = 0$ soit $\mathrm{B}_{n+1}(1) = \mathrm{B}_{n+1}(0)$.

– On a $\Delta\mathrm{B}_1 = 1$ donc d'après la question 2c on a $\deg\mathrm{B}_1 = 1$. Posons donc $\mathrm{B}_1 = a\mathrm{X} + b$ avec $a \neq 0$. On calcule $\Delta\mathrm{B}_1 = a$ donc $a = 1$; B_1 est bien unitaire et de degré 1.

c) Réciproquement, considérons une suite de polynômes (B_n) vérifiant ces trois conditions, et montrons par récurrence sur n que $\Delta\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{X}^n$.

- Si $n = 0$ la troisième condition nous permet d'écrire $\mathrm{B}_1 = \mathrm{X} + b$ avec $b \in \mathbb{R}$ et alors $\Delta\mathrm{B}_1 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Si $n \geqslant 1$, supposons par hypothèse de récurrence $\Delta \mathrm{B}_n = \mathrm{X}^{n-1}$. La première condition nous permet d'affirmer que $\Delta(\mathrm{B}'_{n+1}) = n\Delta\mathrm{B}_n = n\mathrm{X}^{n-1}$. Mais $\Delta(\mathrm{B}'_{n+1}) = (\Delta\mathrm{B}_{n+1})'$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{X}^n + \lambda$. En particulier, $\mathrm{B}_{n+1}(1) - \mathrm{B}_{n+1}(0) = \lambda$, et la deuxième condition nous apprend que $\lambda = 0$, soit $\Delta\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{X}^n$: la récurrence se propage.

Une fois cette existence acquise, la question 8a donne immédiatement que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^n = \mathrm{B}_{n+1}(p+1) - \mathrm{B}_{n+1}(0)$.

Question 10.

a) Supposons les conditions (i), (ii) et (iii) vérifiées. Pour tout $\geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \mathrm{B}'_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\Big(\mathrm{B}_{n+1}(1) - \mathrm{B}_{n+1}(0)\Big) = 0$ donc la condition (2) est vérifiée.

Supposons les conditions (1), (2) et (3) vérifiées. Pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\mathrm{B}_{n+1}(1) - \mathrm{B}_{n+1}(0) = \int_0^1 \mathrm{B}'_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = n\int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc la condition (ii) est vérifiée.
Les conditions (i), (ii), (iii) sont donc équivalentes aux conditions (1), (2), (3).

b) D'après (3), $\mathrm{B}_1 = \mathrm{X} + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \lambda$ donc d'après (2), $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ et ainsi $\mathrm{B}_1 = \mathrm{X} - \dfrac{1}{2}$.

D'après (1), $\mathrm{B}'_2 = \mathrm{X} - \dfrac{1}{2}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{B}_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{X}^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{X} + \lambda$. On a alors $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \lambda$ donc d'après (2), $\lambda = \dfrac{1}{12}$ et $\mathrm{B}_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{X}^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{X} + \dfrac{1}{12}$.
De même, $\mathrm{B}'_3 = 2\mathrm{B}_2$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{B}_3 = \dfrac{1}{3}\mathrm{X}^3 - \dfrac{1}{2}\mathrm{X}^2 + \dfrac{1}{6}\mathrm{X} + \lambda$. On a alors $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \lambda$ donc $\lambda = 0$ et $\mathrm{B}_3 = \dfrac{1}{3}\mathrm{X}^3 - \dfrac{1}{2}\mathrm{X}^2 + \dfrac{1}{6}\mathrm{X}$.
Enfin, $\mathrm{B}'_4 = 3\mathrm{B}_3$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{B}_4 = \dfrac{1}{4}\mathrm{X}^4 - \dfrac{1}{2}\mathrm{X}^3 + \dfrac{1}{4}\mathrm{X}^2 + \lambda$. On a $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_4(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{20} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \lambda$ donc $\lambda = -\dfrac{1}{120}$ et $\mathrm{B}_4 = \dfrac{1}{4}\mathrm{X}^4 - \dfrac{1}{2}\mathrm{X}^3 + \dfrac{1}{4}\mathrm{X}^2 - \dfrac{1}{120}$. D'après la question 8c on a alors :

$$\sum_{k=0}^{p} k = \mathrm{B}_2(p+1) - \mathrm{B}_2(0) = \frac{p(p+1)}{2},\qquad \sum_{k=0}^{p} k^2 = \mathrm{B}_3(p+1) - \mathrm{B}_3(0) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6},\qquad \sum_{k=0}^{p} k^3 = \mathrm{B}_4(p+1) - \mathrm{B}_4(0) = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$$

c) Montrons par récurrence sur n l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant les conditions (1), et (2) et (3), et que ceux-ci sont à coefficients rationnels.

- Les calculs de la question 10b montrent que ceci est vrai pour $n \in \{1,2,3,4\}$.
- Si $n \geqslant 1$, supposons l'existence et l'unicité de $\mathrm{B}_n \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ acquise, et posons $\displaystyle\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k$ avec $a_k \in \mathbb{Q}$. La condition (1) impose l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{d} \frac{na_k}{k+1}\mathrm{X}^{k+1} + \lambda$. La condition (2) impose alors $\displaystyle\lambda = -\sum_{k=0}^{d} \frac{na_k}{(k+1)(k+2)}$, ce qui montre que B_{n+1} est défini de manière unique et que ses coefficients sont rationnels : la récurrence se propage.