Équations matricielles (d'après ENSIETA 1990)

Durée : libre

Dans ce problème, E et F sont des espaces vectoriels réels, de dimensions respectives p et n, non nulles.
f est une application linéaire *non nulle* de E vers F ; ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
On désigne par :

- $\Omega(f)$ l'ensemble des endomorphismes g de F tels que $g \circ f = 0$;
- $\Gamma(f)$ l'ensemble des endomorphismes h de F tels que : $h \circ f = f$;
- $\Gamma'(f)$ l'ensemble des éléments h de $\Gamma(f)$ qui sont inversibles.

Rappel : produit matriciel par blocs

On rappelle (ou on admet) que deux matrices définies par blocs peuvent être multipliées à l'instar du produit des matrices 2×2, sous réserve que les produits soient définis. Plus précisément, si deux matrices M et N sont définies par blocs de la façon suivante :

$$\mathrm{M} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_1 & \mathrm{M}_2 \\ \hline \mathrm{M}_3 & \mathrm{M}_4 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow i \\ \updownarrow n-i \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{j} & \overset{\longleftrightarrow}{p-j} \end{array} & \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{N}_1 & \mathrm{N}_2 \\ \hline \mathrm{N}_3 & \mathrm{N}_4 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow j \\ \updownarrow p-j \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{k} & \overset{\longleftrightarrow}{q-k} \end{array} & \end{array} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$$

$$\text{alors } \mathrm{MN} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_1\mathrm{N}_1 + \mathrm{M}_2\mathrm{N}_3 & \mathrm{M}_1\mathrm{N}_2 + \mathrm{M}_2\mathrm{N}_4 \\ \hline \mathrm{M}_3\mathrm{N}_1 + \mathrm{M}_4\mathrm{N}_3 & \mathrm{M}_1\mathrm{N}_2 + \mathrm{M}_2\mathrm{N}_4 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow i \\ \updownarrow n-i \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{k} & \overset{\longleftrightarrow}{q-k} \end{array} & \end{array}.$$

Partie I.

Question 1. Montrer que $\Omega(f)$ est un espace vectoriel réel et qu'il est stable pour la composition des endomorphismes sur F.
$\Omega(f)$ contient-il l'identité ?

Question 2. Montrer que $\Gamma(f)$ est non vide, qu'il est stable pour la composition des endomorphismes de F, puis que si $h \in \Gamma'(f)$ alors $h^{-1} \in \Gamma'(f)$.

Question 3. Dans cette question on suppose $n = p$. Le rang de f, noté r, vérifie : $r < n$.

a) Quand g décrit $\Omega(f)$, déterminer la valeur maximale de l'entier r' où r' est le rang de g.

b) Montrer que l'on peut trouver des bases (e) de E et (e') de F telles que la matrice de f relativement à ces bases soit la matrice A dont le coefficient de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne $a_{i,j}$ vérifie : $a_{i,i} = 1$ si $1 \leqslant i \leqslant r$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

c) En déduire la dimension de $\Omega(f)$.

Question 4. Dans cette question, E et F sont de dimension 3 rapportés à deux bases (b) et (b') et f est l'application linéaire dont la matrice pour ces bases est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer sur (b'), les matrices des éléments de $\Omega(f)$, de $\Gamma(f)$ et de $\Gamma'(f)$.

Partie II.

Le rang de f est maintenant supposé égal au plus petit des deux entiers n et p.

Question 5. On suppose $p = n$. Déterminer $\Omega(f)$, puis $\Gamma(f)$ et $\Gamma'(f)$.

Question 6. On suppose $p > n$. Déterminer $\Omega(f)$, puis $\Gamma(f)$ et $\Gamma'(f)$.

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de la troisième partie du problème, que $p < n$ et $\operatorname{rg} f = p$.

Question 7. Quand g décrit $\Omega(f)$, déterminer la valeur maximale de l'entier r' où r' est le rang de g.

Question 8. Montrer que l'on peut trouver des bases (e) de E et (e') de F pour lesquelles la matrice de f est la matrice A, dont on précisera le nombre de lignes et celui des colonnes, dont le coefficient de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne $a_{i,j}$ est tel que : $a_{i,i} = 1$ si $1 \leqslant i \leqslant p$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
En déduire :

a) l'ensemble des matrices décrit par la matrice associée à g dans la base (e'), lorsque g parcourt $\Omega(f)$, puis l'ensemble des matrices décrit par la matrice associée à h dans la base (e'), lorsque h parcourt $\Gamma(f)$ et, enfin, lorsque h parcourt $\Gamma'(f)$;

b) la dimension de $\Omega(f)$.

Les matrices demandées seront données sous forme de blocs.

Partie III.

On rappelle que l'on suppose $p < n$ et $\operatorname{rg} f = p$.
On se propose d'étudier l'équation d'inconnue w où w est une application linéaire vérifiant l'équation :

$$f \circ w = h \quad (1)$$

h étant un élément donné de $\Gamma(f)$.

Question 9. Préciser l'espace de départ et l'espace d'arrivée d'une éventuelle solution de cette équation.

Question 10. Montrer que, si cette équation admet des solutions, alors :

a) h est un projecteur ;

b) h est de rang au plus p ;

c) h est de rang exactement p ;

d) $\operatorname{Im}(h) = \operatorname{Im}(f)$;

e) l'équation (1) a exactement une solution.

Question 11. Soit alors h un projecteur tel que $\operatorname{Im}(h) = \operatorname{Im}(f)$. En utilisant les bases (e) et (e') déjà définies dans la deuxième partie, résoudre l'équation (1). Déduire du résultat une condition nécessaire et suffisante portant sur h pour que l'équation (1) admette une solution.

♦ ♦
♦