# Corrigé : équations matricielles (d'après ENSIETA 1990)

## Partie I.

**Question 1.** Montrons que $\Omega(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F)$ :

- l'endomorphisme nul est élément de $\Omega(f)$ ;
- si $g_1, g_2 \in \Omega(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda g_1 + g_2) \circ f = \lambda g_1 \circ f + g_2 \circ f = \lambda.0 + 0 = 0$ donc $\lambda g_1 + g_2 \in \Omega(f)$.

Montrons maintenant que $\Omega(f)$ est stable pour la composition des endomorphismes :
si $g_1, g_2 \in \Omega(f)$ alors $(g_1 \circ g_2) \circ f = g_1 \circ (g_2 \circ f) = g_1 \circ 0 = 0$ donc $g_1 \circ g_2 \in \Omega(f)$.
Observons enfin que $\mathrm{Id} \notin \Omega(f)$ car dans le cas contraire cela signifierait que $f = 0$, ce qui n'est pas.

**Question 2.** $\Gamma(f)$ n'est pas vide car il contient $\mathrm{Id}_F$.
Si $h_1, h_2 \in \Gamma(f)$ alors $(h_1 \circ h_2) \circ f = h_1 \circ (h_2 \circ f) = h_1 \circ f = f$ donc $h_1 \circ h_2 \in \Gamma(f)$.
Enfin, si $h \in \Gamma'(f)$ alors $h \circ f = f \iff f = h^{-1} \circ f$ donc $h^{-1} \in \Gamma'(f)$.

**Question 3.**

*a)* $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$ donc si $g \in \Omega(f)$ alors $\dim \mathrm{Im}\, f \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, g$, soit $r \leqslant n - r'$, où $r' = \mathrm{rg}\, g$. Nous avons montré que $r' \leqslant n - r$, il nous reste à montrer qu'il existe un endomorphisme $g \in \Omega(f)$ de rang $n - r$.
Pour cela, notons H un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, f$ dans F. On a $F = H \oplus \mathrm{Im}\, f$ et on note $p$ la projection sur H parallèlement à $\mathrm{Im}\, f$. On a $\mathrm{rg}\, p = \dim H = n - r$ et $p \circ f = 0$ donc $p \in \Omega(f)$ ; $n - r$ est bien la valeur maximale prise par le rang d'un élément $g$ de $\Omega(f)$.

*b) Un résultat du cours à connaître*. Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ dans E. D'après le théorème du rang on a $\dim H = \mathrm{rg}\, f = r$. Notons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H, que l'on complète par une base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}\, f$ pour obtenir une base $(e)$ de E.
On sait que $f$ réalise un isomorphisme entre H et $\mathrm{Im}\, f$ donc $e'_1 = f(e_1), \dots, e'_r = f(e_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$ ; on la complète pour former une base $(e')$ de F, et par construction on a alors :

$$\mathrm{Mat}_{e,e'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & \mathrm{O}_{r,p-r} \\ \hline \mathrm{O}_{n-r,r} & \mathrm{O}_{n-r,p-r} \end{array}\right) = \mathrm{A}$$

*c)* Soit $g \in \mathcal{L}(F)$ ; sa matrice dans la base $(e')$ prend la forme suivante : $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_1 & \mathrm{M}_2 \\ \hline \mathrm{M}_3 & \mathrm{M}_4 \end{array}\right)$ avec $\mathrm{M}_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $\mathrm{M}_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $\mathrm{M}_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. On calcule :

$$\mathrm{MA} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_1 & \mathrm{M}_2 \\ \hline \mathrm{M}_3 & \mathrm{M}_4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_1 & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{M}_3 & \mathrm{O} \end{array}\right)$$

donc $g \circ f = 0 \iff \mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_3 = 0$. Les éléments de $\Omega(f)$ sont donc les endomorphismes de F dont la matrice dans la base $(e')$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_{r,r} & \mathrm{M}_2 \\ \hline \mathrm{O}_{n-r,r} & \mathrm{M}_4 \end{array}\right)$ ; ainsi $\dim \Omega(f) = n(n - r)$.

**Question 4.** Traduisons matriciellement les résultats de la question précédente : on observe facilement que $\mathrm{rg}\, \mathrm{A} = 2$ donc, en notant P et Q les matrices de passage respectivement de $(b)$ vers $(e)$ et de $(b')$ vers $(e')$ nous avons $\mathrm{A} = \mathrm{Q}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$ (question 3b) et $g \in \Omega(f)$ si et seulement s'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{(b')}(g) = \mathrm{Q}\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}\mathrm{Q}^{-1}$ (question 3c).

Pour déterminer $\Omega(f)$ seule la matrice Q est nécessaire, avec pour contrainte que $(e'_1, e'_2)$ doit être une base de $\mathrm{Im}\, f$. Les opérations élémentaires sur les colonnes de A ne modifient pas l'image et fournissent sans peine deux vecteurs de $\mathrm{Im}\, f$ : $e'_1 = b'_1 + b'_2$ et $e'_2 = b'_2 + b'_3$. On complète cette base en posant par exemple $e'_3 = b'_3$, ce qui nous donne $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule $\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et ainsi, $g \in \Omega(f)$ si et seulement s'il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que (après calcul) $\mathrm{Mat}_{(b')}(g) = \begin{pmatrix} x & -x & x \\ x+y & -x-y & x+y \\ y+z & -y-z & y+z \end{pmatrix}$, soit encore, en posant $a = x$, $b = x+y$ et $c = y+z$ : $\mathrm{Mat}_{(b')}(g) = \begin{pmatrix} a & -a & a \\ b & -b & b \\ c & -c & c \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

On a $h \in \Gamma(f) \iff h \circ f = f \iff (\mathrm{Id} - h) \circ f = 0 \iff \mathrm{Id} - h \in \Omega(f)$ donc $h \in \Gamma(f)$ si et seulement s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{(b')}(h) = \begin{pmatrix} 1-a & a & -a \\ -b & 1+b & -b \\ -c & c & 1-c \end{pmatrix}$.
Enfin, on calcule $\det \mathrm{Mat}_{(b')}(h) = 1 - a + b - c$ donc $h \in \Gamma'(f)$ si et seulement si $a - b + c \neq 1$.

# Partie II.

**Question 5.** Lorsque $p = n$ on a $\mathrm{rg}\, f = p = n$ donc $f$ est inversible, et ainsi $\Omega(f) = \{0\}$, $\Gamma(f) = \Gamma'(f) = \{\mathrm{Id}\}$.

**Question 6.** Lorsque $p < n$ on a $\mathrm{rg}\, f = n$ donc $f$ est surjective : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{F}$ et ainsi, $g \in \Omega(f) \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g \iff \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{F} \iff g = 0$. Ainsi, $\Omega(f) = \{0\}$, et sachant que $h \in \Gamma(f) \iff \mathrm{Id} - h \in \Omega(f)$ on a $\Gamma(f) = \Gamma'(f) = \{\mathrm{Id}\}$.

**Question 7.** On reprend la démarche de la question 3a : $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$ donc si $g \in \Omega(f)$ alors $\dim \mathrm{Im}\, f \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, g$, soit $p \leqslant n - r'$, où $r' = \mathrm{rg}\, g$. Ainsi, $r' \leqslant n - p$, et il y a égalité par exemple lorsque $g$ est une projection sur un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, f$. $n - p$ est donc la valeur maximale du rang de $g \in \Omega(f)$.

**Question 8.** La démarche est semblable à celle utilisée à la question 3b, si ce n'est que cette fois $r = p$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et donc $\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c} \mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{O}_{n-p,p} \end{array}\right)$.

*a)* Soit $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$ ; on pose $\mathrm{Mat}_{(e')}(g) = \mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_1 & \mathrm{M}_2 \end{array}\right)$ avec $\mathrm{M}_1 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_2 \in \mathcal{M}_{n,n-p}(\mathbb{R})$. Alors $g \in \Omega(f) \iff \mathrm{MA} = 0 \iff \mathrm{M}_1 = 0$. Les matrices associées à $g \in \Omega(f)$ sont de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_{n,p} & \mathrm{M}_2 \end{array}\right)$ avec $\mathrm{M}_2 \in \mathcal{M}_{n,n-p}(\mathbb{R})$.

$h \in \Gamma(f) \iff \mathrm{Id} - h \in \Omega(f)$ donc les matrices associées à $h \in \Gamma(f)$ sont de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & \mathrm{N}_1 \\ \hline \mathrm{O}_{n-p,p} & \mathrm{N}_2 \end{array}\right)$ avec $\mathrm{N}_1 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{N}_2 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.
Enfin, $\det h = \det \mathrm{N}_2$ donc les matrices associées aux éléments de $\Gamma'(f)$ sont celles de $\Gamma(f)$ pour lesquelles $\mathrm{N}_2$ est inversible.

*b)* D'après la question précédente il vient immédiatement $\det \Omega(f) = n(n-p)$.

# Partie III.

**Question 9.** On a $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $h \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$ donc $w \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$.

**Question 10.** On considère une solution $w$ de l'équation (1).

*a)* $h \in \Gamma(f)$ et donc $h \circ f = f$. Ainsi, $h \circ h = h \circ f \circ w = f \circ w = h$ donc $h$ est un projecteur.

*b)* $h = f \circ w$ donc $\mathrm{rg}\, h \leqslant \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, w)$. Or $\mathrm{rg}\, f = p$ donc $\mathrm{rg}\, h \leqslant p$.

*c)* $h \in \Gamma(f)$ donc $f = h \circ f$ avec pour conséquence $\mathrm{rg}\, f \leqslant \mathrm{rg}\, h$. D'où $\mathrm{rg}\, h = \mathrm{rg}\, f = p$.

*d)* Mais $h = f \circ w$ donc $\mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{Im}\, f$. Ayant mêmes dimensions, $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Im}\, f$.

*e)* Considérons l'application linéaire $\widetilde{f} : \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right)$ (notez que seul l'espace d'arrivée diffère de $f$). Par construction cette application est surjective. Or $\dim \mathrm{E} = p = \mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$ donc $\widetilde{f}$ est un isomorphisme. Et puisque $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Im}\, f$, on a $f \circ w = h \iff \widetilde{f} \circ w = h \iff w = \widetilde{f}^{-1} \circ h$ : l'équation (1) possède une unique solution.

**Question 11.** En faisant en sorte que la base $(e')$ soit adaptée à la décomposition $\mathrm{F} = \operatorname{Im} h \oplus \operatorname{Ker} h$ on a $\operatorname{Mat}_{e,e'}(f) = \mathrm{A} = \left(\begin{array}{c} \mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{O}_{n-p,p} \end{array}\right)$ et $\operatorname{Mat}_{(e')}(h) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & \mathrm{O}_{p,n-p} \\ \hline \mathrm{O}_{n-p,p} & \mathrm{O}_{n-p} \end{array}\right)$. En posant $\operatorname{Mat}_{e',e}(w) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_1 & \mathrm{M}_2 \end{array}\right)$ avec $\mathrm{M}_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ on a :

$$f \circ w = h \iff \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p \\ \mathrm{O} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_1 & \mathrm{M}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_1 & \mathrm{M}_2 \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right) \iff \mathrm{M}_1 = \mathrm{I}_p,\ \mathrm{M}_2 = 0$$

Donc $\operatorname{Mat}_{e',e}(w) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & \mathrm{O}_{p,n-p} \end{array}\right)$. Ceci assure l'existence et l'unicité de la solution de (1).
La question 10 a montré que si (1) admet une solution alors celle-ci est unique et $h$ est une projection vectorielle sur $\operatorname{Im} f$. Nous venons de montrer la réciproque, à savoir que si $h$ est une projection vectorielle sur $\operatorname{Im} f$ alors (1) possède une solution. On peut conclure : (1) possède une solution (unique) si et seulement si $h$ est une projection sur $\operatorname{Im} f$.

♦ ♦
♦