Étude de la réciproque d'une fonction (E3A MP 2003)

Durée : libre

Dans tout le problème, on considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n.$$

Partie I.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n = \dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

Question 1. Pour tout $x \in [0,1[$, montrer que : $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$.

Soit n un entier naturel strictement positif. On pose $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

Question 2. Établir les égalités : $v_n = \dfrac{1}{2x_n}\ln\left(\dfrac{1+x_n}{1-x_n}\right) - 1$, puis $v_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x_n^{2p}}{2p+1}$.

Question 3. En déduire que : $v_n \leqslant \dfrac{x_n^2}{3(1-x_n^2)} = \dfrac{1}{12n} - \dfrac{1}{12(n+1)}$.

Question 4. Justifier que la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, puis que la suite $\left(\ln(u_n) - \dfrac{1}{12n}\right)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Question 5. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une valeur strictement positive.

Dans la suite, on admettra que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la valeur $\sqrt{2\pi}$. On retrouve ainsi la *formule de Stirling* :

$$n! \sim n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Partie II.

Question 6. Calculer le rayon de convergence de la série entière définissant f.

Question 7. En utilisant la formule de Stirling, montrer que la série de terme général $\dfrac{n^{n-1}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!}$ converge.

Question 8. En déduire la convergence normale de la série définissant f sur $\left[-\dfrac{1}{\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

Question 9. Quel est le domaine de continuité de f ?

Partie III.

Question 10. Montrer que pour tout entier naturel non nul n vérifie l'inégalité :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}.$$

Question 11. Quelle est la classe de f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$? Exprimer f' sous forme de série entière sur cet intervalle.

Question 12. Montrer que f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$ (*indication* : on pourra regrouper les termes deux par deux dans l'expression de f').

Partie IV.

Pour tout entier naturel strictement positif N, on définit A_N et B_N en posant :

$$A_N = \sum_{n=1}^{2N} \frac{n^{n-1}}{n!}\left(-\frac{1}{e}\right)^n \qquad \text{et} \qquad B_N = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{n^{n-1}}{n!}\left(-\frac{1}{e}\right)^n.$$

Question 13. Montrer que les suites $(A_N)_{N\geqslant 1}$ et $(B_N)_{N\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Question 14. Établir un encadrement de $f\left(-\frac{1}{e}\right)$ à l'aide de A_N et de B_N, pour tout entier naturel strictement positif N.

Question 15. Déterminer un entier naturel N tel que $A_N - B_N < 10^{-2}$.

Question 16. En déduire une valeur approchée de $f\left(-\frac{1}{e}\right)$ à 10^{-2} près.

Partie V.

Soit m un entier naturel non nul. On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(x) = (1-e^x)^m.$$

Question 17. Après avoir justifié que ϕ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, montrer que pour tout entier k compris entre 0 et m, il existe un polynôme P_k tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi^{(k)}(x) = P_k(e^x)(1-e^x)^{m-k}.$$

Question 18. En développant $\phi(x)$ en série entière, montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$:

$$\sum_{n=1}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} n^{m-1} = 0.$$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(y) = y\,e^{-y}$.

Question 19. Étudier et représenter la fonction g.

Question 20. Montrer l'existence d'un unique réel $\alpha \in \,]-1,0[$ tel que : $\alpha\, e^{-\alpha} = -\frac{1}{e}$. Montrer de plus que l'on a :

$$\forall y \in [\alpha, 1], \quad g(y) \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right].$$

Question 21. Montrer que pour tout $y \in [\alpha, 1]$,

$$f(y\,e^{-y}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m\right).$$

Question 22. En admettant que l'on puisse intervertir l'ordre de sommation de ces deux sommes, montrer que :

$$\forall y \in [\alpha, 1], \quad f(y\,e^{-y}) = y.$$

Question 23. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$.

Question 24. Que peut-on dire de la dérivabilité de f aux points d'abscisses $-\frac{1}{e}$ et $\frac{1}{e}$? Justifier précisément votre réponse.