Corrigé : étude de la réciproque d'une fonction (E3A MP 2003)

Partie I.

Question 1. On sait que pour tout $x \in]-1,1[$ (a fortiori dans $[0,1[$), $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ et $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$. Pour $x \in [0,1[$, on a donc :

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{n} x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}.$$

Question 2. Pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2x_n}\ln\left(\frac{1+x_n}{1-x_n}\right) - 1$, avec $x_n = \frac{1}{2n+1}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, x_n est dans l'intervalle $[0,1[$ donc d'après la première question, $v_n = \frac{1}{x_n}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x_n^{2p+1}}{2p+1} - 1 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x_n^{2p}}{2p+1}$.

Question 3. Pour tout $p \geqslant 1$, $\frac{1}{2p+1} \leqslant \frac{1}{3}$, ce qui conduit à la majoration :

$$v_n \leqslant \frac{1}{3}\sum_{p=1}^{+\infty} x^{2p} = \frac{1}{3}x_n^2 \sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p} = \frac{1}{3}\frac{x_n^2}{1-x_n^2} = \frac{1}{6n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

Question 4. Puisque x_n est positif, l'expression $v_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x_n^{2p}}{2p+1}$ obtenue à la question 2 montre qu'il en est de même de v_n. Or $v_n = \ln u_n - \ln u_{n+1}$, donc la suite $(\ln u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien décroissante.

L'inégalité de la question 3 s'écrit : $\ln u_n - \frac{1}{12n} \leqslant \ln u_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}$ pour $n \geqslant 1$. La suite $(\ln u_n - \frac{1}{12n})_{n\geqslant 1}$ est bien croissante.

Question 5. Puisque la suite $(\frac{1}{12n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, les suites $(\ln u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\ln u_n - \frac{1}{12n})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes, et convergent en conséquence vers une même limite ℓ. Par continuité de l'exponentielle, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers le réel strictement positif e^{ℓ}.

Partie II.

Question 6. On note $a_n = \frac{n^{n-1}}{n!}$ le coefficient de x^n dans la série entière. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = |x|\,\mathrm{e}^{(n-1)\ln(1+\frac{1}{n})} = |x|\,\mathrm{e}^{1+\mathrm{o}(1)}$$

converge vers $|x|\mathrm{e}$, dons d'après la règle de d'Alembert, $|x|\mathrm{e} < 1 \Rightarrow$ la série $\sum a_n x^n$ converge absolument, et $|x|\mathrm{e} > 1 \Rightarrow$ la série $\sum a_n x^n$ diverge. Le rayon de convergence de la série entière vaut donc $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Question 7. Utilisons maintenant la formule de Stirling pour obtenir l'équivalent : $a_n \mathrm{e}^{-n} xp(-n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{3/2}}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est à terme général positif et convergente, donc la série $\sum a_n \mathrm{e}^{-n}$ converge.

Ceci prouve la convergence absolue de la série entière $\sum a_n x^n$ pour $x = \pm\frac{1}{\mathrm{e}}$; le domaine de définition de f est donc le segment $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

Question 8. Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, $|a_n x^n| \leqslant a_n \mathrm{e}^{-n}$. Or la série numérique $\sum a_n \mathrm{e}^{-n}$ converge, donc ceci prouve la convergence normale (et donc uniforme) de la série entière définissant f sur $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

Question 9. Puisque le terme général de la série entière est continu sur $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ et que la série entière converge uniformément sur cet intervalle, f est continue sur $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

Partie III.

Question 10. On note $\theta : x \mapsto \ln(1+x) - x$. la fonction θ est dérivable sur$]-1, +\infty[$, de dérivée $\theta' : x \mapsto \frac{-x}{1+x}$. Sur $]0, +\infty[$, $\theta'(x) < 0$, donc θ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Or $\theta(0) = 0$, donc la fonction θ est à valeurs strictement positives sur $]0, +\infty[$.
Pour $n \geqslant 1$, on a donc $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < n$ et par stricte croissance de l'exponentielle, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$.

Question 11. La fonction f est somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{\mathrm{e}}$, donc est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$ et ses dérivées se calculent par dérivation terme à terme. En particulier, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$.

Question 12. On a $f'(0) = 1$ et pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[\setminus \{0\}$, en notant $\alpha_n = \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$, on a :

$$f'(x) = \lim_{p \to +\infty} \sum_{n=0}^{2p-1} \alpha_n = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p-1} (\alpha_{2k} + \alpha_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha_{2k} + \alpha_{2k+1}).$$

Or $\frac{|\alpha_{2k+1}|}{|\alpha_{2k}|} = (1 + \frac{1}{2k+1})^{2k+1} |x| < \mathrm{e}\,|x| < 1$, donc $\alpha_{2k} + \alpha_{2k+1}$ est du signe de α_{2k}, c'est à dire strictement positif.
Finalement $f'(x) > 0$ sur tout l'intervalle $\left]-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$ et f y est donc strictement croissante.

Partie IV.

Question 13. On note $b_n = (-1)^n \frac{n^{n-1}}{n!} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ de sorte que $\mathrm{A_N} = \sum_{n=0}^{2\mathrm{N}} b_n$ et $\mathrm{B_N} = \sum_{n=0}^{2\mathrm{N}+1} b_n$.
Pour $\mathrm{N} \geqslant 1$, $\mathrm{A_{N+1}} - \mathrm{A_N} = b_{2\mathrm{N}+1} + b_{2\mathrm{N}+2} = |b_{2\mathrm{N}+2}| - |b_{2\mathrm{N}+1}|$ et $\mathrm{B_{N+1}} - \mathrm{B_N} = |b_{2\mathrm{N}+2}| - |b_{2\mathrm{N}+3}|$.
Or $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} < \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1$, donc la suite $(|b_n|)_{n \geqslant 1}$ est strictement décroissante. On en déduit : $\mathrm{A_{N+1}} - \mathrm{A_N} < 0$ et $\mathrm{B_{N+1}} - \mathrm{B_N} > 0$. La suite $(\mathrm{A_N})_{\mathrm{N} \geqslant 1}$ est strictement décroissante et la suite $(\mathrm{B_N})_{\mathrm{N} \geqslant 1}$ strictement croissante.
Puisque $\mathrm{A_N} - \mathrm{B_N} = -b_{2\mathrm{N}+1}$ converge vers 0 (car la série $\sum b_n$ converge), les suites $(\mathrm{A_N})_{\mathrm{N} \geqslant 1}$ et $(\mathrm{B_N})_{\mathrm{N} \geqslant 1}$ sont adjacentes.
Remarque. En fait, on nous demande ici de démontrer dans un cas particulier le critère spécial des séries alternées ...

Question 14. La limite des suites $(\mathrm{A_N})_{\mathrm{N} \geqslant 1}$ et $(\mathrm{B_N})_{\mathrm{N} \geqslant 1}$ est $f\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$, donc pour tout $\mathrm{N} \geqslant 1$, $\mathrm{B_N} < f\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) < \mathrm{A_N}$.

Question 15. $\mathrm{A_N} - \mathrm{B_N} = -b_{2\mathrm{N}+1} = |b_{2\mathrm{N}+1}|$ décroît et tend vers 0. On calcule successivement $|b_1|, |b_3|, \ldots$ jusqu'à obtenir un terme strictement inférieur à 10^{-2}. On trouve $|b_{11}| > 10^{-2}$ et $|b_{13}| < 10^{-2}$, donc $\mathrm{N} = 6$ convient.

Question 16. $\frac{1}{2}(\mathrm{A_6} + \mathrm{B_6})$ est donc une valeur approchée de $f\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ à $0,5.10^{-2}$ près. D'où : $f\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) \approx -0,77$ à 10^{-2} près.

Partie V.

Question 17. ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction polynôme et de l'exponentielle. Montrons alors le résultat demandé en procédant par récurrence.

- Le résultat est immédiat pour $k = 0$, avec $P_0 = 1$.
- Soit $k \in [\![1, m]\!]$. On suppose qu'il existe un polynôme P_{k-1} tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi^{(k-1)}(x) = P_{k-1}(e^x)(1-e^x)^{m-k+1}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi^{(k)}(x) = e^x P'_{k-1}(e^x)(1-e^x)^{m-k+1} - (m-k+1)e^x P_{k-1}(e^x)(1-e^x)^{m-k} = P_k(e^x)(1-e^x)^{m-k}$$

  où P_k est le polynôme $X(1-X)P'_{k-1} - (m-k+1)XP_{k-1}$. D'où le résultat au rang k ; la récurrence se propage.

Question 18. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule du binôme,

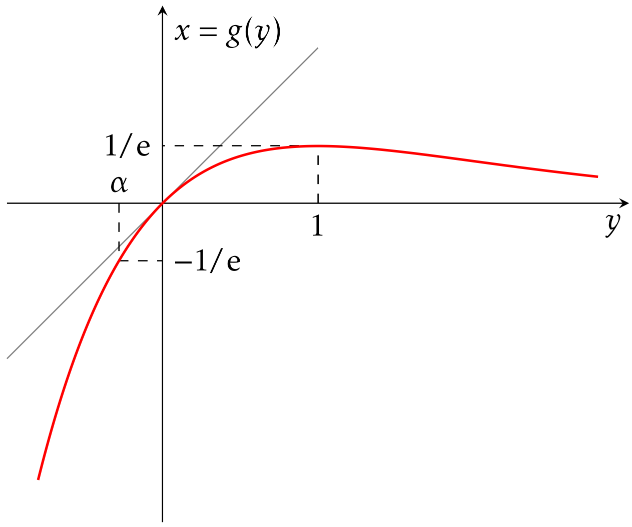
$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} (-1)^n e^{nx} = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} (-1)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} (-1)^n \frac{n^k}{k!} \right) x^k.$$

Nous avons obtenu le développement en série entière de ϕ. Or nous savons que celui-ci est donné par la série de Taylor de ϕ, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} (-1)^n \frac{n^k}{k!} = \frac{\phi^k(0)}{k!}$.
Ceci est en particulier vrai pour $k = m-1$. Or si $m \geqslant 2$, $\phi^{m-1}(0) = 0$ d'après la question précédente. Donc :

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} (-1)^n n^{m-1} = \sum_{n=1}^{m} \binom{m}{n} (-1)^n n^{m-1} = 0.$$

Question 19. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $g'(y) = (1-y)e^{-y}$. D'où les variations :

y	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



Question 20. La fonction g est continue et strictement monotone sur $]-1, 0[$; $g(0) = 0$ et $g(-1) = -e$. Puisque $-\dfrac{1}{e}$ est compris entre $-e$ et 0, il existe un unique $\alpha \in]-1, 0[$ tel que $g(\alpha) = -\dfrac{1}{e}$.
Soit $y \in [\alpha, 1]$. Comme g est croissante sur $[\alpha, 1]$, $g(y)$ appartient à l'intervalle $[g(\alpha), g(1)] = \left[-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right]$.

Question 21. Soit $y \in [\alpha, 1]$. Puisque $g(y) \in \left[-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right]$, on a :

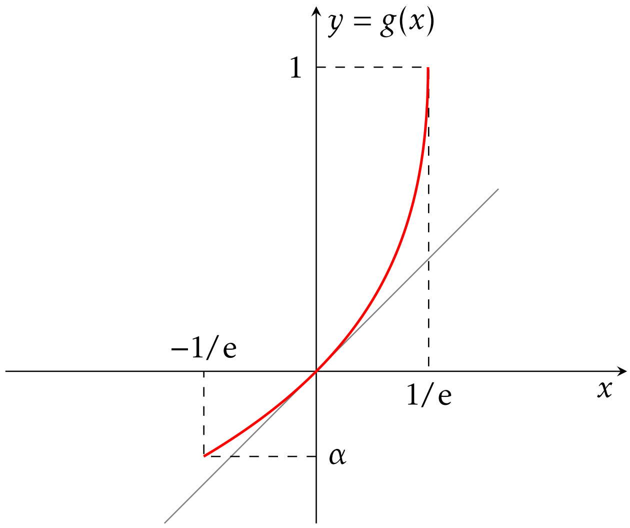
$$\begin{aligned} f(y e^{-y}) = f\big(g(y)\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n e^{-ny} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{n^k}{k!} y^k \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{n^{n+k-1}}{n!k!} y^{n+k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m \right). \end{aligned}$$

Question 22. Pour $y \in [\alpha, 1]$, on admet qu'on peut permuter les deux symboles de sommation dans l'égalité :

$$f(y\,\mathrm{e}^{-y}) = \sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{m}(-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m\Big) = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\Big(\sum_{n=1}^{m}(-1)^n n^{m-1}\binom{m}{n}\Big)y^m.$$

Mais d'après la question 18, les termes de cette somme correspondants aux entiers $m \geqslant 2$ sont nuls ; il reste donc uniquement le terme correspondant à $m = 1$, soit : $f(y\,\mathrm{e}^{-y}) = y$.

Question 23. Sur l'intervalle $[\alpha, 1]$, g est continue et strictement monotone et on a l'égalité $f\big(g(y)\big) = y$; la fonction f est donc la fonction réciproque de la restriction de g à $[\alpha, 1]$. On obtient sa courbe représentative par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe représentative de la restriction de g à $[\alpha, 1]$.



Question 24. La fonction g est dérivable en α et en 1, et $g'(1) = 0$ et $g'(\alpha) \neq 0$. La fonction réciproque f est dérivable là où g' ne s'annule pas, donc f est dérivable en $g(\alpha) = -1/\mathrm{e}$ (et $f'(-1/\mathrm{e}) = \dfrac{1}{g'(\alpha)}$) mais pas en $g(1) = 1/\mathrm{e}$.