# Mathématiques 1

**PC**

**2024**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

Ce sujet comporte quatre parties, qui peuvent être traitées indépendamment :

— La partie I étudie deux façons d'approcher le réel $\sqrt{2}$.

— La partie II généralise la méthode de Héron d'Alexandrie étudiée en sous-partie I.B au cadre des matrices symétriques positives.

— La partie III traite le cas général de la méthode de Newton numérique réelle.

— La partie IV s'inspire de la méthode de Newton abordée en partie III pour établir l'existence de la décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford, par une approche algorithmique et en donne une application à la détermination de la racine carrée de certaines matrices.

**Notations**

Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $q$ est un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $q$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ ; on note $I_q$ la matrice identité dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $P^\mathrm{T}$ la transposée d'une matrice $P$. On note $\mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{O}(q)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $P^\mathrm{T}P = I_q$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient d'indice $(i,j)$ de $M$.

Pour $a_1, ..., a_q \in \mathbb{K}$, on note $\mathrm{diag}(a_1, ..., a_q)$ la matrice $A$ de $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$ :

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} a_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On munit l'ensemble $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que, par l'équivalence des normes en dimension finie, la notion de convergence d'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$. On pourra alors utiliser librement et sans démonstration dans tout le sujet les deux résultats suivants :

pour toute suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$,

— la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $M$ si et seulement si, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$, la suite $\left([M_n]_{i,j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $[M]_{i,j}$ ;

— si $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $M$, alors les suites $(AM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_nA)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $AM$ et $MA$.

# I Quelques approximations de $\sqrt{2}$.

### *I.A – Via un développement en série entière.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k).$$

**Q 1.** Montrer que le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ vaut :

$$R = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

**Q 2.** Donner, sans justification supplémentaire, l'expression de la fonction somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ sur $]-R, R[$.

**Q 3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$. Montrer que, pour tout $x \in ]-1, 1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} b_n x^n.$$

**Q 4.** Déterminer un équivalent simple de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}b_n$.

**Q 5.** Montrer que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}b_n x^n$ converge uniformément sur $[-1,1]$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n$.

**Q 6.** Montrer que

$$\sqrt{2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}b_k+\underset{n\to+\infty}{O}\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big).$$

### *I.B – Via la méthode de Héron d'Alexandrie.*

Soit $a\in\mathbb{R}_+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} c_0(a)=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ c_{n+1}(a)=\dfrac{1}{2}\Big(c_n(a)+\dfrac{a}{c_n(a)}\Big). \end{cases}$$

**Q 7.** Montrer, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a)>0$.

**Q 8.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, donner une expression de $c_{n+1}(a)^2-a$ faisant intervenir $(c_n(a)^2-a)^2$. En déduire que, pour tout $n\geqslant 1$, $c_n(a)\geqslant\sqrt{a}$.

**Q 9.** Montrer que $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

**Q 10.** Calculer $c_1(2)$. À l'aide de la question Q 8, montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$c_n(2)^2-2\leqslant 8\Big(\frac{1}{32}\Big)^{2^{n-1}}.$$

En déduire que

$$\sqrt{2}=c_n(2)+\underset{n\to+\infty}{O}\bigg(\Big(\frac{1}{32}\Big)^{2^{n-1}}\bigg).$$

### *I.C – Comparaison des différentes approximations de $\sqrt{2}$ : vitesses de convergence.*

**Q 11.** Parmi les deux suites $\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$ et $\bigg(\Big(\dfrac{1}{32}\Big)^{2^{n-1}}\bigg)$, déterminer celle qui converge le plus vite vers zéro.

*Dans la question suivante, on s'interdit d'utiliser une valeur approchée de $\sqrt{2}$ stockée dans Python. En particulier, on s'interdit l'utilisation de* `2**(1/2)`, `math.sqrt(2)` *ou* `numpy.sqrt(2)`.

**Q 12.** Écrire une suite d'instructions en Python permettant, grâce à la méthode de la question Q 10, d'obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ avec 10 décimales correctes.

# II Racine carrée d'une matrice symétrique positive.

On note $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices $M\in\mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $X^{\mathrm{T}}MX\geqslant 0$ pour toute matrice colonne $X\in\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

Dans toute cette partie, étant donnée une matrice $M\in\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on appelle racine carrée de $M$ toute matrice $B\in\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle que $B^2=M$.

### *II.A – Racines carrées de la matrice $I_2$.*

**Q 13.** Rappeler sans démonstration la description des matrices de $\mathrm{O}(2)$.

On décrira leurs coefficients en fonction d'un paramètre $\theta\in\mathbb{R}$.

**Q 14.** Déterminer les racines carrées de $I_2$ appartenant à $\mathrm{O}(2)$. Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de $I_2$ ?

### *II.B – Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive.*

**Q 15.** Rappeler sans démonstration la condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre d'une matrice symétrique pour qu'elle soit positive.

**Q 16.** Soit $M\in\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B\in\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2=M$.

**Q 17.** Montrer que $B$ est la seule racine carrée de $M$ appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.

On note alors $\sqrt{M}$ l'unique racine carrée symétrique positive de $M$.

***II.C – Une méthode de Héron d'Alexandrie matricielle.***

Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_q$ les valeurs propres de $M$ comptées avec multiplicité. On rappelle que, d'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}(q)$ telle que

$$M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_q)\,P^{\mathrm{T}}.$$

On rappelle de plus que, pour tout réel $a \geqslant 0$, la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ définie en sous-partie I.B, est à valeurs strictement positives et converge vers $\sqrt{a}$. On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N},\, M_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(M_n + MM_n^{-1}\right). \end{cases}$$

**Q 18.** Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n$ est bien définie et que

$$M_n = P\,\mathrm{diag}(c_n(\lambda_1), ..., c_n(\lambda_q))\,P^{\mathrm{T}}.$$

**Q 19.** En déduire que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.

# III Méthode de Newton numérique.

Soit $I$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$ telle que $f'$ ne s'annule pas sur $I$.

***III.A – Convergence de la méthode de Newton.***

**Q 20.** Que dire du nombre du nombre de points d'annulation de $f$ sur $I$ ?

On suppose qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$. Pour tout $r > 0$, on pose $J_r = [c - r, c + r]$.

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\begin{cases} c_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\, c_{n+1} = c_n - \dfrac{f(c_n)}{f'(c_n)}. \end{cases}$$

L'objectif de cette sous-partie III.A est de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $J_r \subset I$ et tel que, si $c_0 \in J_r$, alors $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $c$.

**Q 21.** Soit $r > 0$ tel que $J_r \subset I$. Justifier que $s_r = \sup\limits_{J_r} |f''|$ et $i_r = \inf\limits_{J_r} |f'|$ sont bien définis et que $i_r > 0$.

On note $K_r = \dfrac{s_r}{2i_r}$.

**Q 22.** Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que $0 \leqslant rK_r < 1$.

Dans la suite de cette sous-partie III.A, on fixe $r > 0$ tel que $rK_r < 1$.

**Q 23.** On suppose que $n \in \mathbb{N}$ et $c_n \in J_r$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|c_{n+1} - c| \leqslant K_r |c_n - c|^2,$$

puis en déduire que $c_{n+1} \in J_r$.

**Q 24.** Montrer que, si $c_0 \in J_r$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leqslant \dfrac{\left(K_r|c_0 - c|\right)^{2^n}}{K_r}$ et conclure.

***III.B – Une implémentation en Python.***

**Q 25.** On désigne dans cette question par `df` la fonction Python représentant $f'$. Écrire une fonction Python `newton(c0,f,df)` prenant en arguments le réel $c_0$ et les fonctions $f$ et $f'$ et renvoyant, si la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, une valeur approchée de $c$ et la valeur `None` si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

*On pourra convenir ici que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si on trouve un $n \leqslant 50$ tel que $|f(c_n)| < 10^{-10}$, et qu'elle diverge sinon.*

# IV Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford et calcul de racine carrée.

On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$.

Dans toute cette partie IV, on fixe $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de $M$ (avec $s \in \mathbb{N}^*$). On définit alors

$$P(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i).$$

On note $P'$ le polynôme dérivé de $P$.

Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{d} \gamma_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $Q(M) = \sum_{k=0}^{d} \gamma_k M^k \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et on pose

$$\mathbb{C}[M] = \{Q(M) |\, Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

On admet alors et on pourra utiliser librement que :

— si $A, B \in \mathbb{C}[M]$, alors $A$ et $B$ commutent, et $A + B$ et $AB$ appartiennent à $\mathbb{C}[M]$ ;

— si $Q \in \mathbb{C}[X]$ et si $A \in \mathbb{C}[M]$, alors $Q(A) \in \mathbb{C}[M]$.

### *IV.A – Une méthode de Newton matricielle.*

**Q 26.** Montrer que, pour toute racine complexe $\mu$ de $P'$, la matrice $M - \mu I_q$ est inversible. En déduire que $P'(M)$ est inversible.

**Q 27.** Montrer que le polynôme caractéristique $\chi_M$ de $M$ divise $P^q$. En déduire que $P(M)$ est nilpotente.

Grâce à ces résultats, on peut définir la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\begin{cases} M_0 = M \\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1} \end{cases}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

— $M_n$ est bien définie et appartient à $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ ;

— il existe $B_n \in \mathbb{C}[M]$ telle que $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$ ;

— la matrice $P'(M_n)$ est inversible.

**Q 28.** Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

**Q 29.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les matrices $M$ et $M_n$ commutent.

**Q 30.** On note $A$ la limite de $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $A$ est diagonalisable.

**Q 31.** On pose $N = M - A$. Justifier que $A$ et $N$ commutent et que $N$ est nilpotente.

### *IV.B – Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles trigonalisables*

**Q 32.** En utilisant le développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, montrer qu'il existe un polynôme $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^q$ divise $1 + X - R_q(X)^2$.

**Q 33.** En déduire l'expression d'une racine carrée de $I_q + N$ lorsque $N$ est une matrice nilpotente.

Pour les questions suivantes, on suppose que $M$ est à coefficients réels et trigonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et que le spectre de $M$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

On considère alors les matrices $A$ et $N$ introduites dans la sous-partie IV.A.

**Q 34.** Justifier que $A$ et $N$ sont à coefficients réels et que $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

**Q 35.** Montrer que le spectre de $A$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

**Q 36.** Justifier que la méthode de Héron d'Alexandrie de la sous-partie II.C peut être appliquée à la matrice $A$ afin d'obtenir une racine carrée $A'$ de $A$. En déduire l'expression d'une racine carrée de $M$.

---

• • • FIN • • •

---

 