Corrigé : racines carrées (Centrale 1 PC 2024)

I Quelques approximations de $\sqrt{2}$

I. A – Via un développement en série entière

Q 1. Si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors pour tout $n \geqslant \alpha+1$, $a_n = 0$ et donc $\mathrm{R} = +\infty$ (la série entière est une fonction polynomiale).
Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{|n-\alpha|}{n+1} \to 1$ donc d'après le critère de d'Alembert, $\mathrm{R} = 1$.

Q 2. On reconnaît un développement usuel : pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1+x)^\alpha$.

Q 3. Pour $\alpha = 1/2$ on a tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{2}-k\Big) = \frac{1}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}\big(1-2k\big) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\prod_{k=1}^{n-1}\big(2k-1\big) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} = (-1)^{n+1}b_n$$

donc d'après la question précédente, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{n+0}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n x^n$.

Q 4. D'après la formule de Stirling, $b_n \sim \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}}{2^{2n}(2n)(2\pi n)n^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$.
$3/2 > 1$ donc la série $\sum(-1)^{n+1}b_n$ est absolument convergente, et donc convergente.

Q 5. Notons $f_n : x \mapsto (-1)^{n+1}b_n x^n$. Sur l'intervalle $[-1,1]$, $\|f_n\|_\infty = b_n = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$ donc la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement, et donc uniformément convergente. Chacune des fonctions f_n étant continue sur $[-1,1]$, il en est donc de même de la somme. Cette dernière étant égale à $\sqrt{1+x}$ sur $]-1,1[$, on en déduit à l'aide de la continuité en 1 que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n = \sqrt{2}$.

Q 6. Ainsi, $\sqrt{2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}b_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}b_k$.

La suite $(b_k)_{k\geqslant 1}$ tend vers 0, et elle est décroissante car $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \dfrac{k-1/2}{k+1} < 1$. D'après le critère spécial relatif aux séries alternées, $\Big|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}b_k\Big| \leqslant b_{n+1} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ et ainsi, $\sqrt{2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}b_k = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$.

I. B – Via la méthode de Héron d'Alexandrie

Q 7. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $c_n(a)$ est bien défini et $c_n(a) > 0$:

- c'est clair si $n = 0$ puisque $c_0(a) = 1$;
- si $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat acquis au rang n. $c_n(a)$ ne s'annule pas donc $c_{n+1}(a)$ est bien défini, et $c_n(a) > 0 \implies c_{n+1}(a) > 0$. La récurrence se propage.

Q 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1}(a)^2 - a = \dfrac{(c_n(a)^2-a)^2}{4c_n(a)^2} \geqslant 0$ donc $c_{n+1}(a)^2 \geqslant a$, et puisque $c_{n+1}(a) > 0$, $c_{n+1}(a) > \sqrt{a}$. On a bien pour tout $n \geqslant 1$, $c_n(a) \geqslant \sqrt{a}$.

Q 9. Pour tout $n \geqslant 1$, $c_n(a) - c_{n+1}(a) = \dfrac{c_n(a)^2 - a}{2c_n(a)} \geqslant 0$ donc la suite $(c_n(a))_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Étant minorée par $\sqrt{a}$, elle converge vers une limite $\ell \geqslant \sqrt{a}$, et le passage à la limite dans la relation de récurrence fournit l'égalité : $\ell = \dfrac{1}{2}\Big(\ell + \dfrac{a}{\ell}\Big)$, soit $\ell^2 = a$. Puisque $\ell > 0$, la suite $(c_n(a))$ converge vers $\sqrt{a}$.

Q 10. On a $c_1(2) = 3/22$. D'après la question 8, la suite $u_n = c_n(2)^2 - 2$ vérifie pour $n \geqslant 1$ la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{4c_n(2)^2} \leqslant \dfrac{u_n^2}{4c_1(2)^2} = \dfrac{u_n^2}{9}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant 8\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$:

- c'est vrai pour $n = 1$ car $u_1(2) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{8}{32}$;
- si $n \geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang n. Alors $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n^2}{9} \leqslant \dfrac{64}{9}\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^n} \leqslant 8\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^n}$: la récurrence se propage.

On a donc $c_n(2)^2 = 2 + \epsilon_n$ avec $\epsilon_n = \mathrm{O}\left(\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$. Or $c_n(2) = \sqrt{2+\epsilon_n} = \sqrt{2}\left(1+\epsilon_n/2\right)^{1/2} = \sqrt{2} + \mathrm{O}(\epsilon_n)$ car $\epsilon_n \to 0$, donc $\sqrt{2} = c_n + \mathrm{O}\left(\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$.

I. C – *Comparaison des différentes approximations de $\sqrt{2}$: vitesses de convergence*

Q 11. Posons $u_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ et $v_n = \left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \to 0$ donc $\lim \dfrac{\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}}{\frac{v_n}{u_n}} = 0$, ce qui prouve (critère de d'Alembert) que $\lim \dfrac{v_n}{u_n} = 0$, et donc que $v_n = \mathrm{o}(u_n)$.

Q 12. Pour $n = 5$, $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}} \approx 8.10^{-25}$ donc on peut espérer que $c_5(2)$ approche $\sqrt{2}$ avec 10 décimales (bien plus en réalité).

```
c = 1
for _ in range(4):
    c = (c + 2 / c) /2
print(c)
```

II Racine carrée d'une matrice symétrique positive

II. A – *Racines carrées de la matrice I_2*

Q 13. A appartient à $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Q 14. Avec les mêmes notations, $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_2$ si et seulement si $2\theta \equiv 0 \bmod 2\pi$, ce qui donne deux solutions : $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
Dans $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, I_2 possède exactement deux racines carrées : I_2 et $-\mathrm{I}_2$.
Le nombre total de racines carrées de I_2 est donc supérieur ou égal à 2.

II. B – *Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive*

Q 15. $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_+$.

Q 16. Si $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$, il existe d'après le théorème spectral une matrice $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_q(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{\mathrm{T}}$. La matrice $\mathrm{B} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{\mathrm{T}}$ avec $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q}\right)$ est élément de $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ et vérifie $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.

Q 17. Réciproquement, soit $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$. On a $\mathrm{AB} = \mathrm{B}^3 = \mathrm{BA}$ donc B commute avec A. Or deux endomorphismes auto-adjoints u et v qui commutent sont co-diagonalisables. En effet, les sous-espaces propres de u sont stables par v, et les différents induits de v sur ces sous-espaces sont toujours auto-adjoints dont diagonalisables dans des bases orthonormées.
Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_q(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{AP}$ et $\Delta = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{BP}$ soient diagonales, et $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A} \iff \Delta^2 = \mathrm{D}$ soit, puisque les valeurs propres de B sont positives, $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q}\right)$, ce qui assure l'unicité de B.

II. C – *Une méthode de Héron d'Alexandrie matricielle*

Q 18. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $M_n = P\,\mathrm{diag}\big(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q)\big)P^T$:

- c'est vrai pour $n = 0$ puisque $c_0(a) = 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$;
- si $n \geqslant 0$, supposons le résultat acquis au rang n. Alors

$$P^T M_n P = \frac{1}{2}\big(P^T M_n P + (P^T M P)(P^T M_n^{-1} P)\big) = \mathrm{diag}\Big(\frac{1}{2}\Big(c_n(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}\Big), \ldots, \frac{1}{2}\Big(c_n(\lambda_q) + \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\Big)\Big) = \mathrm{diag}\big(c_{n+1}(\lambda_1), \ldots, c_{n+1}(\lambda_q)\big)$$

donc la récurrence se propage.

Q 19. On déduit de la question 9 que $\lim P^T M_n P = \mathrm{diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_q}\big) = P^T \sqrt{M} P$, et donc que $\lim M_n = \sqrt{M}$.

III Méthode de Newton numérique

III. A – Convergence de la méthode de Newton

Q 20. f' est continu et ne s'annule pas donc garde un signe constant ; f est donc strictement monotone, et ne peut donc pas s'annuler plus d'une fois.

Q 21. f' et f'' sont continues sur le segment J_r donc sont bornées, ce qui donne un sens às_r et i_r. De plus, ces bornes sont atteintes donc i_r ne s'annule pas.

Q 22. On a $r < r' \implies J_r \subset J_{r'}$ donc la fonction $r \mapsto s_r$ est une fonction croissante et la fonction $r \mapsto i_r$ une fonction décroissante. On en déduit que la fonction $r \mapsto K_r$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Étant à valeurs positives, elle est donc bornée au voisinage de 0, et ainsi $\lim\limits_{r \to 0} rK_r = 0$, ce qui assure l'existence d'un $r > 0$ tel que $0 \leqslant rK_r < 1$.

Q 23. D'après l'inégalité de Taylor-Langrange appliquée entre c_n et c, $\big|f(c) - f(c_n) - (c - c_n)f'(c_n)\big| \leqslant \dfrac{(c_n - c)^2}{2} s_r$.
Sachant que $f(c) = 0$ ceci s'écrit aussi $\left|c_n - \dfrac{f(c_n)}{f'(c_n)} - c\right| \leqslant \dfrac{(c_n - c)^2}{2} \dfrac{s_r}{|f'(c_n)|} \leqslant K_r(c_n - c)^2$, soit $|c_{n+1} - c| \leqslant K_r(c_n - c)^2$.
En particulier, $|c_{n+1} - c| \leqslant K_r r^2 \leqslant r$ d'après la question précédente, donc $c_{n+1} \in J_r$.

Q 24. Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $c_n \in J_r$ et $|c_n - c| \leqslant \dfrac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$:

- c'est immédiat pour $n = 0$;
- si $n \geqslant 0$, supposons le résultat acquis au rang n. Alors d'après la question précédente, $c_{n+1} \in J_r$ et

$$|c_{n+1} - c| \leqslant K_r \left(\frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}\right)^2 = \frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^{n+1}}}{K_r}$$

donc la récurrence se propage.

Puisque $K_r|0 - c| \leqslant rK_r < 1$ on a $\lim (K_r|c_0 - c|)^{2^{n+1}} = 0$ et donc $\lim c_n = c$.

III. B – Une implémentation en Python

Q 25. On définit la fonction :

```python
def newton(c0, f, df):
    c = c0
    for _ in range(50):
        c = c - f(c) / df(c)
        if abs(f(c))< 1e-10:
            return c
```

IV Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford et calcul de racine carrée

IV. A – Une méthode de Newton matricielle

Q 26. P est scindé à racine simple donc il n'existe pas de racine commune à P et P' ; ainsi, si μ est racine de P' alors μ n'est pas valeur propre de M, et $M - \mu I_q$ est inversible.
Dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme P' est scindé donc d'après ce qui précède, P'(M) est le produit de $s - 1$ matrices inversibles donc est inversible.

Q 27. Puisque χ_M est scindé, il existe $n_1, \dots, n_s$ tel que $\chi_M = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{n_i}$, avec $n_1 + \dots + n_s = q$. Chacun des n_i est donc inférieur ou égal à q, ce qui montre que χ_M divise P^q.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0$ donc $P(M)^q = 0$, ce qui montre que $P(M)$ est nilpotent.

Q 28. Puisque $P(M)$ est nilpotente, il existe un rang n à partir duquel $P(M)^{2^n} = 0$, avec pour conséquence que $P(M_n) = 0$, puis que $M_{n+1} = M_n$: la suite (M_n) est stationnaire.

Q 29. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que M et M_n commutent :

- c'est évident pour $n = 0$ puisque $M_0 = M$;
- si $n \in \mathbb{N}$, supposons que M et M_n commutent. Alors M commute avec $P(M_n)$ et $P'(M_n)$, et donc aussi avec $P'(M_n)^{-1}$. On en déduit alors que M commute avec M_{n+1} : la récurrence se propage.

Q 30. La suite (M_n) stationne donc possède une limite A (égale à la valeur en laquelle la suite stationne). Ainsi, $A = A - P(A)P'(A)^{-1}$, ce qui implique $P(A) = 0$. Or P est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

Q 31. D'après la question 29 la matrice M commute avec chacune des matrices M_n, et puisque M_n est stationnaire, M commute avec A. Ainsi, $NA = MA - A^2 = AM - A^2 = AN$ donc N et A commutent.

Notons n le rang à partir duquel $M_n = A$. On a $N = M - A = M_0 - M_n = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - M_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} P(M_k)P'(M_k)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} P(M)^{2^k} B_k$.
Ceci nous permet d'écrire $N = P(M)B$ où $B = \sum_{k=0}^{n-1} P(M)^{2^k - 1} B_k$ est un polynôme en M, qui commute donc avec P(M).
On a donc $N^q = P(M)^q B^q = 0$ d'après la question 27 : N est bien nilpotente.

IV. B – Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles trigonalisables

Q 32. La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 donc possède un développement limité à l'ordre q, que l'on écrit $\sqrt{1+x} = R_q(x) + x^q \epsilon(x)$, avec $R_q \in \mathbb{R}_q[X]$ et $\lim\limits_{0} \epsilon(x) = 0$.
Ainsi, $1 + x - R_q(x)^2 = 2x^q R_q(x)\epsilon(x) + x^{2q}\epsilon(x)^2 = x^q\big(2R_q(x)\epsilon(x) + x^q\epsilon(x)^2\big)$, ce qui montre que $1 - x - R_q(x)^2 \underset{0}{=} o(x^q)$.
Considérons maintenant la division euclidienne de $1 - X - R_q(X)^2$ par X^q : $1 - X - R_q(X)^2 = X^q Q + R$ avec $\deg R < q$. Le résultat précédent impose $Q(0) + \lim\limits_{0} \dfrac{R(x)}{x^q} = 0$, ce qui n'est possible que si $Q(0) = 0$ et $R = 0$ puisque $\deg R \leqslant q - 1$.
Le polynôme $1 + X - R_q(X)^2$ est donc divisible par X^q.

Q 33. Posons $1 + X - R_q(X)^2 = X^q Q$, où q est l'indice de nilpotence de N. Alors $I_q + N - R_q(N)^2 = N^q Q(N) = 0$ donc $R_q(N)^2 = I_q + N$: la matrice $R_q(N)$ est une racine carrée de N.

Q 34. Le polynôme P est à coefficients réels donc la suite de matrices (M_n) reste dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, ce qui montre que A et N sont à coefficients réels.
De plus, on a vu que $P(A) = 0$, et puisque P est un polynôme réel scindé à racines simples, A est bien diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Q 35. Le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P donc dans le spectre de M. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Q 36. La partie II (à l'exception de la question 17) peut s'appliquer à toute matrice diagonalisable dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$, en remplaçant P^T par P^{-1}. La méthode de Héron d'Alexandrie permet donc d'obtenir une racine carrée A′ de A.
Le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ donc A est inversible. On a donc $M = A(I_q + A^{-1}N)$. A et N commutent donc $A^{-1}N$ est nilpotente ; elle possède donc une racine carrée $R_q(A^{-1}N)$ d'après la question 33.
La matrice $M' = A'R_q(A^{-1}N)$ est alors une racine carrée de M (il n'est pas tout à fait évident que les matrices A′ et $R_q(A^{-1}N)$ commutent, ce qui est nécessaire pour prouver que $M'^2 = M$, mais c'est vrai).