Corrigé : CC INP PC 2024

EXERCICE 1
Racine cubique d'une matrice

Partie I – Étude d'un exemple

Q1. On calcule $\chi_A(x) = x^2 - 9x + 8 = (x-1)(x-8)$. Ce polynôme est scindé à racines simples donc A est diagonalisable : il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Q2. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $\Delta = P^{-1}BP$. Alors $B^3 = P\Delta^3P^{-1}$ donc $B^3 = A \iff P\Delta^3P^{-1} = PDP^{-1} \iff \Delta^3 = D$ puisque P et P^{-1} sont inversibles.

Q3. Si $\Delta^3 = D$ alors $D\Delta = \Delta^4 = \Delta D$ donc D et Δ commutent. Posons donc $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $D\Delta = \Delta D \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix} \iff b = c = 0$. La matrice Δ est diagonale.

Q4. On en déduit que $\Delta^3 = D \iff a^3 = 1$ et $d^3 = 8$, soit $a = 1$ et $d = 2$. Il existe donc une unique racine cubéque de A, égale à $P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Partie II – Dans un plan euclidien

Q5. L'endomorphisme u associé à M dans la base $\mathcal{B}$ est la rotation d'angle θ.

Q6. La matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta/3) & -\sin(\theta/3) \\ \sin(\theta/3) & \cos(\theta/3) \end{pmatrix}$ associée à la rotation d'angle $\theta/3$ est donc une racine cubique de M.

Q7. Soit v l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est N. Puisque $\det N = -1$, v est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. On a donc $N^2 = I$ et ainsi, $N^3 = N$. La matrice N est sa propre racine cubique.

Partie III – Racines cubiques et diagonalisation

III.1 - Existence d'une racine cubique polynomiale

Q8. La matrice $H_p(\sqrt[3]{\lambda})$ est une racine cubique de $H_p(\lambda)$.

Q9. A est diagonalisable donc semblable à la matrice $D = \operatorname{diag}\big(H_{p_1}(\lambda_1), \dots, H_{p_d}(\lambda_d)\big)$, avec $\chi_A(x) = \prod_{k=1}^{d}(x-\lambda_k)^{p_k}$.

Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1}$, posons $\Delta = \operatorname{diag}\big(H_{p_1}(\sqrt[3]{\lambda_1}), \dots, H_{p_d}(\sqrt[3]{\lambda_d})\big)$ et $B = P\Delta P^{-1}$. Alors $\Delta^3 = D$ donc $B^3 = A$. La matrice A possède bien une racine cubique.

III.2 - Réduction d'une racine cubique

Q10. A est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de A.

Q11. Notons que 0 n'est pas racine de l'équation $z^3 = \lambda$. On peut donc poser $z = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $z^3 = \lambda \iff (r^3 = \rho$ et $3\alpha \equiv \theta \bmod 2\pi)$. L'équation $r^3 = \rho$ possède une unique solution $r = \sqrt[3]{\rho}$ et l'équation $3\alpha \equiv \theta \bmod 2\pi$ trois dans $[0, 2\pi[$ donc l'équation $z^3 = \lambda$ possède exactement trois solutions dans $\mathbb{C}$.

Q12. Chacun des polynômes $X^3 - \lambda_k$ est donc scindé, et puisqu'un nombre ne peut être racine cubique de deux nombres distincts, Q est scindé à racines simples.

Q13. A est diagonalisable donc annulé par le polynôme $P = \prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k)$. Si $B^3 = A$, alors $P(A) = 0 \iff P(B^3) = 0 \iff Q(B) = 0$, et puisque Q est scindé à racines simples, ceci prouve que B est diagonalisable.

EXERCICE 2
La fonction $\ln(\Gamma)$

Partie I – Existence de la solution du problème étudié

Q14. Fixons $x > 0$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n(x) = \dfrac{x^2 - x}{2n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum u_n$ converge absolument, et donc simplement sur $]0, +\infty[$.

Q15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et

$$u_n'(x) = \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} + \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) - \frac{1}{n} = \frac{x}{n(n+x)} + \epsilon_n \quad \text{avec } \epsilon_n = \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) - \frac{1}{n}$$

On a $\epsilon_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$ donc $\sum \epsilon_n$ converge absolument.

Q16. Sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{b}{n(n+a)} + |\epsilon_n|$ donc sur ce segment, $\|u_n'\|_\infty = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

Q17. Sur $[a, b]$ les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$, la convergence de $\sum u_n$ est simple et la convergence de $\sum u_n'$ uniforme donc la fonction $\sum u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, puis sur $]0, +\infty[$ par recouvrement. Il en est donc de même de la fonction φ (*condition (i)*), et pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) - \frac{1}{n+x}\Big)$$

Si $0 < x < y$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\dfrac{1}{n+x} \leqslant -\dfrac{1}{n+y}$ donc $\varphi'(x) \leqslant \varphi'(y)$: φ' est croissante sur $]0, +\infty[$ (*condition (iii)*).

Pour tout $x > 0$, $\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln\Big(\dfrac{x+1}{x}\Big) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\big(u_n(x+1) - u_n(x)\big) = -\ln\Big(\dfrac{x+1}{x}\Big) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\ln\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big) + \ln\Big(\dfrac{n+x}{n+1+x}\Big)\Big)$.

Par télescopage, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) = \ln(N+1)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\ln\Big(\frac{n+x}{n+1+x}\Big) = \ln(x+1) - \ln(N+1+x)$ donc

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln x + \lim_{N \to +\infty}\ln\Big(\frac{N+1}{N+1+x}\Big) = \ln x \quad (\textit{condition (ii)})$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(1) = 0$ donc $\varphi(1) = 0$ (*condition (iv)*). La fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II – Unicité de la solution

Q18. Pour tout $x > 0$, $h(x+1) - h(x) + \phi(x+1) - \phi(x) - \big(g(x+1) - g(x)\big) = 0$ d'(après la condition (ii).
D'après la condition (i) la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ donc en dérivant la relation précédente on obtient $h'(x+1) - h'(x) = 0$.

Q19. Soit $x \in]0, 1[$ et $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la condition (iii) la fonction φ' est croissante donc $\varphi(x+p) \geqslant \varphi'(p)$ et $g'(x+p) \leqslant g'(1+p)$.
Ainsi $h'(x+p) = \varphi'(x+p) - g'(x+p) \geqslant \varphi'(p) - g'(1+p)$.
De même, $\varphi'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p)$ et $g'(x+p) \geqslant g'(p)$ donc $h'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p) - g'('p)$.

Enfin, $\varphi'(p)-g'(1+p)=\varphi'(p)-g'(p)+g'(p)-g'(1+p)=h'(p)-\dfrac{1}{p}$ (en dérivant la condition (ii) pour g).

De même, $\varphi'(1+p)-g'(p)=\varphi'(1+p)-\varphi'(p)+\varphi'(p)-g'(p)=\dfrac{1}{p}-h'(p)$ donc $-\dfrac{1}{p}\leqslant h'(x+p)-h'(x)\leqslant\dfrac{1}{p}$, soit encore $\left|h'(x+p)-h'(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{p}$.

Q20. La question 18 a montré que la fonction h' est 1-périodique. On a donc pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $h'(x+p)-h'(p)=h'(x)-h'(1)$. D'après la question 19, on a donc pour tout $x\in\,]0,1[$ et tout $p\in\mathbb{N}^*$, $\left|h'(x)-h'(1)\right|\leqslant\dfrac{1}{p}$ et par passage à la limite, $h'(x)=h'(1)$. La fonction h' étant 1-périodique, ceci montre que h' est constante égale à $h'(1)$.

Q21. La fonction h est donc affine : il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x>0$, $h(x)=ax+b$. Mais d'après la question 18 la fonction h est 1-périodique, donc $a=0$, et enfin $b=0$ d'après la condition (iv). On a montré que $h=0$, soit $\varphi=g$.

Partie III – La formule de duplication

Q22. On calcule $u_n(1/2)=\ln\dfrac{2\sqrt{n(n+1)}}{(2n+1)}$ donc $\exp\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}u_n(1/2)\right)=\dfrac{2^{\mathrm{N}}\sqrt{\mathrm{N}!(\mathrm{N}+1)!}}{(2\mathrm{N}+1)(2\mathrm{N}-1)\cdots(3)}=\dfrac{\sqrt{\mathrm{N}+1}(2^{\mathrm{N}}\mathrm{N}!)^2}{(2\mathrm{N}+1)!}$.

Q23. D'après la formule de Stirling, lorsque N tend vers $+\infty$, $\exp\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}u_n(1/2)\right)\sim\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{N}}}\dfrac{2\pi\mathrm{N}4^{\mathrm{N}}\mathrm{N}^{2\mathrm{N}}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{N}}}{\sqrt{4\pi\mathrm{N}}(2\mathrm{N})^{2\mathrm{N}}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{N}}}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient donc que $\exp\big(\varphi(1/2)+\ln(1/2)\big)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que $\varphi(1/2)=\dfrac{\ln\pi}{2}$, soit $\psi(1)=0$.

Q24. Montrons que la fonction ψ vérifie les conditions (C) :

- φ est de classe $\mathscr{C}^1$ donc ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;
- pour tout $x>0$, $\psi(x+1)-\psi(x)=\ln 2+\varphi\left(\dfrac{x}{2}+1\right)-\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)=\ln 2+\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)=\ln(x)$;
- φ est croissante donc ψ est croissante ;
- $\psi(1)=0$ (question précédente).

Par unicité on en déduit que $\psi=\varphi$, ce qui prouve que pour tout $x>0$, $(x-1)\ln 2+\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)+\varphi\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=\varphi(x)+\dfrac{1}{2}\ln\pi$.

Remarque. Il est possible de montrer que pour tout $x>0$, $\varphi(x)=\ln\big(\Gamma(x)\big)$ (ce qui explique le titre de ce problème). Le résultat que nous venons de démontrer atteste que pour tout $x>0$, $\dfrac{\Gamma(x/2)\Gamma(x/2+1/2)}{\Gamma(x)}=2^{1-x}\sqrt{\pi}$ (formule dite de duplication).

EXERCICE 3
Temps d'attente avant une collision

Partie I – Une expression de l'espérance de T_n

Q25. On a $\mathrm{T}_n(\Omega)=[\![2,n+1]\!]$ car au bout de $n+1$ tirage, il y aura au moins une boule tirée deux fois.

Q26. Les variables aléatoires $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_k$ sont mutuellement indépendantes donc pour tout $(x_1,\ldots,x_k)\in[\![1,n]\!]^k$, $\mathbb{P}\big(\mathrm{Z}=(x_1,\ldots,x_k)\big)=\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}(\mathrm{X}_i=x_i)=\dfrac{1}{n^k}=\mathrm{card}\big([\![1,n]\!]^k\big)$. Z suit bien une loi uniforme.

Q27. Le cardinal de A est égal au nombre d'injections de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, soit $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

On a $\mathrm{T}_n>k\iff\mathrm{Z}\in\mathrm{A}$ et puisque Z suit une loi uniforme, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}\in\mathrm{A})=\dfrac{\mathrm{card}\,\mathrm{A}}{n^k}$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n>k)=\dfrac{n!}{(n-k)!n^k}$.

Q28. T_n est à valeurs finies donc possède une espérance finie. Par ailleurs, T_n est une variable aléatoire à valeurs entières, donc $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T_n > k)$ car $\mathbb{P}(T_n > n+1) = 0$ donc $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}$.

Partie II – Une expression intégrale de l'espérance

Q29. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t^k \mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{=} O(\mathrm{e}^{-t/2})$ donc l'intégrale I_k est convergente.

Q30. Une intégration par parties donne : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} = (k+1)I_k$. Sachant que $I_0 = 1$ on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

Q31. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} t^k \mathrm{e}^{-t}$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes, et

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} I_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \mathbb{E}(T_n)$$

Partie III – Un équivalent de l'espérance

III.1 - Étude de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Q32. Le changement de variable bijectif $t = v + n$ conduit à l'expression $J_n = \mathrm{e}^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$.

Q33. Pour tout $v \geqslant 0$, $\left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{v/2}$ donc $0 \leqslant K_n \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v/2}\,\mathrm{d}v = 2$.

Q34. On a $J_n = 2^n \mathrm{e}^{-n} K_n$ et $\lim 2^n \mathrm{e}^{-n} = 0$ car $\mathrm{e} > 2$ donc, puisque la suite (K_n) est bornée, $\lim J_n = 0$.

III.2 - Étude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Q35. Le changement de variable bijectif $t = u\sqrt{n}$ donne $I_n = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$.

Q36. Pour tout $u \in]0, \sqrt{n}[$, $\ln\big(f_n(u)\big) = n\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n}$. Or $\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k$ donc $\ln\big(f_n(u)\big) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{k/2-1}}$.

Q37. La suite $a_k = \frac{u^k}{kn^{k/2-1}}$ tend vers 0 (car la série converge) et est décroissante : en effet, $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} \frac{u}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{k}{k+1} \leqslant 1$.

D'après le critère spécial relatif aux séries alternées, $\ln\big(f_n(u)\big) + \frac{u^2}{2} = \sum_{k=3}^{+\infty} (-1)^{k-1} a_k$ est du signe de son premier terme, à savoir $\ln\big(f_n(u)\big) + \frac{u^2}{2} \leqslant 0$, et $\left|\ln\big(f_n(u)\big) + \frac{u^2}{2}\right| \leqslant a_3 = \frac{u^3}{3\sqrt{n}}$.

Q38. La fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $\mathrm{e}^{-u^2/2} \underset{+\infty}{=} O(\mathrm{e}^{-u})$.

Soit $u > 0$. Pour tout $n > u^2$, $\left|\ln\big(f_n(u)\big) + \frac{u^2}{2}\right| \leqslant \frac{u^3}{3\sqrt{n}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\big(f_n(u)\big) = -\frac{u^2}{2}$. Ceci montre que la suite (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction (continue par morceaux) $u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2/2}$.
De plus, pour tout $u \in]0, \sqrt{n}[$, $f_n(u) \leqslant \mathrm{e}^{-u^2/6} = \phi(u)$, majoration qui reste vraie pour $u \geqslant \sqrt{n}$.
La fonction ϕ est intégrable donc le théorème de convergence dominée s'applique : $\lim \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$.

III.3 - Conclusion

Q39. Nous avons montré que $\lim \mathrm{J}_n = 0$ et $\mathrm{I}_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$.