Le théorème de réalisation de Borel (Centrale PC 2011 - extrait)

Durée : libre

Le but de ce problème est d'étudier l'existence d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dont on a fixé a priori les valeurs des dérivées successives en 0.

On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulles en dehors d'un segment (qui dépend de la fonction considérée dans $\mathcal{W}$).

I Intervention des séries entières

Soit (u_n) une suite complexe. On cherche dans cette partie des fonctions $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, qui sont somme d'une série entière sur un intervalle $]-\delta, \delta[$ pour au moins un réel $\delta > 0$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = u_n$.

I. A – Si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-\delta, \delta[$, avec $\delta > 0$, donner une expression de $f^{(k)}(x)$ sur $]-\delta, \delta[$, et en déduire $f^{(k)}(0)$ en fonction de a_k pour tout $k \geqslant 0$.

I. B – Dans les exemples suivants, proposer une solution f, en précisant une valeur de δ convenable :

I. B. 1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

I. B. 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ pair, $u_n = (-1)^{n/2} n!$, et pour tout n impair, $u_n = 0$.

I. C – Pour la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n)!$, montrer qu'aucune fonction du type considéré dans cette partie n'est solution du problème.

II Le théorème de Borel

II. A – Une fonction en cloche

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

II. A. 1)

a) Montrer que pour tout naturel p il existe un polynôme $\mathrm{Q}_p \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall x \in]0,1[, \qquad g^{(p)}(x) = \frac{\mathrm{Q}_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}}$$

Pour tout entier $p \geqslant 1$, exprimer Q_p en fonction de Q_{p-1} et Q'_{p-1}.

b) En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, Q_p est de degré $3p-2$.

II. A. 2)

a) Montrer que pour tout entier naturel p, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} g^{(p)}(x) = \lim_{x \to 1^-} g^{(p)}(x) = 0$.

b) En déduire que $g \in \mathcal{W}$.

II. B – Une fonction en plateau

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par $h(x) = \dfrac{\int_{x-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t}$.

II. B. 1) Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, constante sur $]-\infty, 1]$ et sur $[2, \infty[$.

II. B. 2) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = h(2x)h(-2x)$ pour tout réel x.

a) Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.

b) Montrer que φ est nulle en dehors de $[-1,1]$ et tracer sommairement l'allure de son graphe.

c) Justifier pour tout entier naturel p non nul l'existence du réel $\lambda_p = \displaystyle\max_{k \in \{0,\dots,p-1\}} \max_{x \in [-1,1]} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|$.

II. C – Le théorème de Borel

Soit (u_n) une suite complexe. On définit pour tout entier naturel n une fonction g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_0(x) = \varphi(x) \quad \text{et si } n \geqslant 1 \quad g_n(x) = \frac{x^n}{n!}\varphi(\beta_n x)$$

où $\beta_n = \max(1, 4^n|u_n|\lambda_n)$.

II. C. 1)

a) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction g_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g_n est nulle hors du segment $\left[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}\right]$.

II. C. 2) Soit n et j des entiers naturels tels que $j < n$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$.

b) En déduire que $g_n^{(j)}(0) = 0$.

c) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \geqslant \frac{1}{\beta_n}$, on a $g_n^{(j)}(x) = 0$.

d) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leqslant \frac{1}{\beta_n}$, on a $\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leqslant 2^{-(n+1)}$.

II. C. 3) Déduire des questions précédentes que pour $n, j \in \mathbb{N}, \quad g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}$.

II. C. 4) En considérant $\sigma = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n$, montrer qu'il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall j \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}(0) = u_j$, ce qui constitue le théorème de Borel.

Note. *Ce théorème met en évidence l'existence de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui ne coïncident pas avec leur série de Taylor. Il suffit en effet d'appliquer le théorème de Borel à la suite $u_n = (2n)!$: il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = (2n)!$, bien que la série de Taylor de cette fonction ait un rayon de convergence nul.*

♦ ♦
♦