Le théorème de réalisation de Borel (Centrale PC 2011 - extrait)

I Intervention des séries entières

I. A – f est une série entière définie sur un intervalle ouvert centré en 0 donc sur cet intervalle f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-\delta, \delta[$, $f^{(k)}(x) = \sum_{n \geqslant k} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$. On en déduit que $f^{(k)}(0) = a_k k!$.

I. B – D'après ce qui précède, une telle fonction f n'existe que si la série entière $\sum \frac{u_n}{n!}$ a un rayon de convergence δ strictement positif.

I. B. 1) Nous avons ici $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$; le rayon de convergence est égal à $+\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$.

I. B. 2) Nous avons ici $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{2p}$; le rayon de convergence est égal à 1 et $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

I. C – Lorsque $u_n = (2n)!$, posons $a_n = \frac{(2n)!}{n!}$. On calcule $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2(2n+1) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc d'après le critère de d'Alembert la série entière $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence nul ; aucune fonction f n'est solution du problème.

II Le théorème de Borel

II. A – Une fonction en cloche

II. A. 1)

a) Prouvons l'existence de Q_p par récurrence sur p.

– Pour $p = 0$ on pose $Q_0 = 1$.

– Si $p > 0$, supposons acquise l'existence du polynôme Q_{p-1} : $\forall x \in]0, 1[$, $g^{(p-1)}(x) = \frac{Q_{p-1}(x)}{(x(x-1))^{2p-2}} e^{1/(x(x-1))}$.
Dérivons une fois de plus :

$$g^{(p)}(x) = \left(\frac{x(x-1)Q'_{p-1}(x) - (2p-2)(2x-1)Q_{p-1}(x)}{(x(x-1))^{2p-1}} - \left(\frac{2x-1}{(x(x-1))^2} \right) \frac{Q_{p-1}(x)}{(x(x-1))^{2p-2}} \right) e^{1/(x(x-1))}$$
$$= \frac{x^2(x-1)^2 Q'_{p-1}(x) - (2x-1)((2p-2)x(x-1)+1)Q_{p-1}(x)}{(x(x-1))^{2p}} e^{1/(x(x-1))}$$

Il suffit donc de poser $Q_p = X^2(X-1)^2 Q'_{p-1} - (2X-1)((2p-2)X(X-1)+1)Q_{p-1}$ pour prouver l'existence de Q_p.

b) Prouvons maintenant par récurrence sur $p \geqslant 1$ que $\deg Q_p = 3p - 2$.

– Si $p = 1$ on a $Q_1 = -2X + 1$ et $\deg Q_1 = 1$.

– Si $p \geqslant 2$, supposons $\deg Q_{p-1} = 3p - 5$ et notons c_{p-1} le coefficient dominant de Q_{p-1}.
D'après la formule de récurrence on a $\deg Q_p \leqslant \deg Q_{p-1} + 3 = 3p - 2$, et le coefficient de X^{3p-2} vaut $c_p = (3p-5)c_{p-1} - 2(2p-2)c_{p-1} = -(p+1)c_{p-1} \neq 0$ donc on a bien $\deg Q_p = 3p - 2$.

Remarque. Ce calcul permet de prouver en outre que le coefficient dominant de Q_p est égal à $c_p = (-1)^p (p+1)!$.

II. A. 2)

a) Par croissance comparée nous avons $\lim_{t \to -\infty} t^{2p} e^t = 0$ donc par composition des limites,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/(x(x-1))}}{(x(x-1))^{2p}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{1/(x(x-1))}}{(x(x-1))^{2p}} = 0$$

Puisque Q_p est continue en 0 et en 1, $\lim_{x \to 0^+} g^{(p)}(x) = \lim_{x \to 1^-} g^{(p)}(x) = 0$.

b) Par application des théorèmes généraux la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Étant nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to 0^-} g^{(p)}(x) = \lim_{x \to 1^+} g^{(p)}(x) = 0$, ce qui, compte tenu de la question précédente, prouve que pour tout $p \in \mathbb{N}$, g est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $g \in \mathcal{W}$.

II.B – Une fonction en plateau

II.B.1) Notons que g est continue et strictement positive sur $]0,1[$ donc $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t > 0$.
L'application g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc il en est de même de sa primitive $\mathrm{G} : x \mapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Mais $h(x) = \dfrac{\mathrm{G}(1)-\mathrm{G}(x-1)}{\mathrm{G}(1)}$ donc h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Puisque g est nulle en dehors de $[0,1]$ on a $\mathrm{G}(x) = 0$ lorsque $x \leqslant 0$ et $\mathrm{G}(x) = \mathrm{G}(1)$ lorsque $x \geqslant 1$. Ainsi, lorsque $x \geqslant 2$ on a $h(x) = 0$ et lorsque $x \leqslant 1$ on a $h(x) = 1$. La fonction h est bien constante sur $]-\infty,1]$ et sur $[2,+\infty[$.

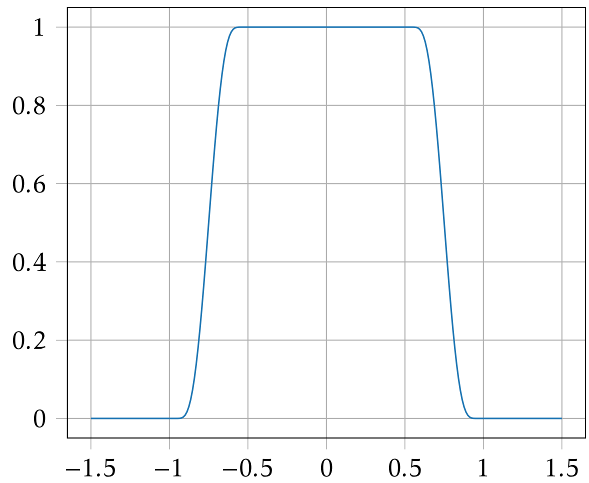
II.B.2)

a) Par application des théorèmes généraux φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car h l'est. De plus, d'après la formule de Leibniz, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(p)}(x) = 2^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} h^{(k)}(2x) h^{(p-k)}(-2x)$. En particulier $\varphi^{(p)}(0) = 2^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} h^{(k)}(0) h^{(p-k)}(0)$.

La fonction h étant constante sur $]-\infty,1]$ on a pour tout $k \geqslant 1$, $h^{(k)}(0) = 0$.
Or lorsque $p \geqslant 1$ on a pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $k \geqslant 1$ ou $p-k \geqslant 1$ donc dans tous les cas $h^{(k)}(0)h^{(p-k)}(0) = 0$, ce qui montre que $\varphi^{(p)}(0) = 0$.

b) Lorsque $x \geqslant 1$ on a $2x \in [2,+\infty[$ donc $h(2x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$. La fonction φ étant paire, il en est de même lorsque $x \leqslant -1$.
La parité nous permet de n'étudier φ que sur l'intervalle $[0,1]$. Or lorsque $x \in [0,1]$ on a $-2x \leqslant 0$ donc $h(-2x) = 1$ et ainsi, $\varphi(x) = h(2x)$. Mais sur cet intervalle $h'(x) = -g(x-1) \leqslant 0$ donc h est décroissante sur $[0,1]$.
Notons enfin que lorsque $x \in [0,1/2]$ on a $2x \leqslant 1$ donc $h(2x) = 1$; la fonction φ est constante sur $[0,1/2]$ (et sur $[-1/2,1/2]$ par parité).
On en déduit l'allure suivante (que l'on trace avec Python parce que c'est plus confortable) :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

def g(x):
    if x > 0 and x < 1:
        return np.exp(1/x/(x-1))
    return 0

def h(x):
    return quad(g, x-1, 1)[0] / quad(g, 0, 1)[0]

def phi(x):
    return h(2*x)*h(-2*x)

X = np.linspace(-1.5, 1.5, 256)
Y = [phi(x) for x in X]

plt.plot(X, Y)
plt.grid()
plt.show()
```



c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,p-1]\!]$ la fonction $|\varphi^{(k)}|$ est continue sur le segment $[-1,1]$ donc y est bornée et atteint ses bornes, ce qui justifie l'existence de $\max_{x\in[-1,1]} |\varphi^{(k)}(x)|$, puis de λ_p puisque k ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

II.C – Le théorème de Borel

II.C.1)

a) Puisque φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ il en est de même des fonctions g_n par application des théorèmes généraux.

b) Puisque φ est nulle en dehors du segment $[-1,1]$, g_n est nulle en dehors du segment $\left[-\dfrac{1}{\beta_n}, \dfrac{1}{\beta_n}\right]$.

II.C.2)

a) D'après la formule de Leibniz, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \dfrac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$.

b) Pour tout $j \in [\![0,i]\!]$, $n-j+i \in [\![n-j,n]\!]$ donc $n-j+i \geqslant 1$ puisque $j < n$. On en déduit que $g_n^{(j)}(0) = 0$.

c) La fonction φ ainsi que toutes ses dérivées sont nulles en dehors de l'intervalle $[-1,1]$ donc lorsque $|x| \geqslant \dfrac{1}{\beta_n}$ on a $\varphi^{(i)}(\beta_n x) = 0$ et par suite $g_n^{(j)}(x) = 0$.

d) Lorsque $|x| \leqslant \dfrac{1}{\beta_n}$, $|\beta_n x| \leqslant 1$ donc $|\varphi^{(i)}(\beta_n x)| \leqslant \lambda_n$ et

$$|g^{(j)}(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \lambda_n \frac{\beta_n^{j-i-n}}{(n-j-i)!} = \lambda_n \beta_n^{j-n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{1}{(n-j-i)!} \leqslant \lambda_n \beta_n^{j-n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} = 2^j \lambda_n \beta_n^{j-n}.$$

On a $\beta_n \geqslant 1$ et $j-n \leqslant -1$ donc $\beta_n^{j-n} \leqslant \beta_n^{-1}$. De plus, $2^j \leqslant 2^{n-1}$ donc $|g^{(j)}(x)| \leqslant 2^{n-1}\lambda_n\beta_n^{-1}$ et $|u_n g^{(j)}(x)| \leqslant 2^{n-1}\dfrac{\lambda_n |u_n|}{\beta_n}$.
Il reste à observer que $\beta_n \geqslant 4^n \lambda_n |u_n|$ pour conclure : $|u_n g^{(j)}(x)| \leqslant \dfrac{2^{n-1}}{4^n} = 2^{-n-1}$.

II.C.3) Nous avons déjà montré à la question II.C.2.b que $g_n^{(j)}(0) = 0$ lorsque $j < n$.
Pour $j \geqslant n$ la formule de Leibniz s'applique toujours mais les dérivées de x^n au delà du rang n sont nulles ce qui conduit à une formule légèrement différente qu'en II.C.2.a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n^{(j)}(x) = \displaystyle\sum_{i=j-n}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$.
On a alors $g_n^{(j)}(0) = \dbinom{j}{j-n} \beta_n^{j-n} \varphi^{(j-n)}(0)$.
Mais φ est constante égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$ donc $\varphi(0) = 1$ et $\varphi^{(k)}(0) = 0$ pour $k \geqslant 1$. Ainsi, $g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}$.

II.C.4) Nous allons montrer que la fonction σ répond aux exigences de l'énoncé. Pour cela on pose $f_n = u_n g_n$.
D'après la question II.C.1 les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.
D'après les questions II.C2.c-d on a pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $n \geqslant j$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$, ce qui assure pour tout $j \in \mathbb{N}$ la convergence normale donc uniforme des séries $\displaystyle\sum_n f_n^{(j)}$.
Le théorème de dérivation des séries de fonctions s'applique donc : σ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\sigma^{(j)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n^{(j)}$.
Il reste à appliquer la question II.C.3 : $\sigma^{(j)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n^{(j)}(0) = u_j$. La fonction σ répond bien aux exigences du théorème de Borel.