Corrigé : séries de polynômes de Stirling (d'après Centrale PC 1991)

Partie I.

Question 1. Considérons deux entiers naturels k et n. On a $\Gamma_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k \\ \binom{n}{k} & \text{si } k \leqslant n \end{cases}$ donc $\Gamma_k(n) \in \mathbb{N}$, et si $n \geqslant 1$ alors $\Gamma_k(-n) = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \in \mathbb{Z}$ donc pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\Gamma_k(x) \in \mathbb{Z}$. En particulier, $\Gamma_k(k) = 1$ et $\Gamma_k(-1) = (-1)^k$.

Question 2.
$$\Gamma_k(\mathrm{X}+1) - \Gamma_k(\mathrm{X}) = \frac{(\mathrm{X}+1)\mathrm{X}\cdots(\mathrm{X}-k+2)}{k!} - \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-k+1)}{k!} = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-k+2)}{k!}(\mathrm{X}+1-\mathrm{X}+k-1)$$
$$= \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-k+2)}{(k-1)!} = \Gamma_{k-1}(\mathrm{X}).$$
$$k\Gamma_k(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-k+1)}{(k-1)!} = (\mathrm{X}-k+1)\frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-k+2)}{(k-1)!} = (\mathrm{X}-k+1)\Gamma_{k-1}(\mathrm{X}).$$

Question 3. L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ est évidente.
L'implication $(iii) \Longrightarrow (i)$ est une conséquence immédiate de la question1.
Reste à prouver l'implication $(ii) \Longrightarrow (iii)$. Pour cela on raisonne par récurrence sur le degré de Q.

- si $\deg \mathrm{Q} = 0$, $\mathrm{Q} = a_0$ est un polynôme constant et $a_0 = \mathrm{Q}(x_0) \in \mathbb{Z}$.
- si $\deg \mathrm{Q} = n > 1$, on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$.
  La famille (Γ_k) est une base de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ car échelonnée en degré : il existe donc des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma_k(\mathrm{X})$, et il s'agit de montrer que ce sont des entiers relatifs.
  Posons $\mathrm{R}(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{Q}(\mathrm{X})$. On a $\deg \mathrm{R} \leqslant n-1$ et pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathrm{R}(x_i) \in \mathbb{Z}$ donc on peut appliquer à R l'hypothèse de récurrence : il existe des entiers $b_0, \dots, b_{n-1}$ tels que $\mathrm{R}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \Gamma_k$.
  Mais d'après la question 2, $\mathrm{R}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Gamma_{k-1}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \Gamma_k(\mathrm{X})$. Par unicité de la décomposition dans une base on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_{k+1} = b_k \in \mathbb{Z}$.
  Il reste à observer que $a_0 = \mathrm{Q}(x_0) - \sum_{k=1}^{n} a_k \Gamma_k(x_0) \in \mathbb{Z}$ pour conclure : la récurrence se propage.

Partie II.

Question 4.

a) Raisonnons par récurrence sur n.

- Si $n = 0$ il faut et il suffit de poser $a_0 = f(0)$.
- Si $n > 0$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$: il existe des entiers $a_0, \dots, a_{n-1}$ uniques tels que pour tout $x \in [\![0, n-1]\!]$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Gamma_k(x)$.
  Observons déjà que puisque $\Gamma_n(x) = 0$ pour tout $x \in [\![0, n-1]\!]$, ces égalités vont rester vraies au rang n quel que soit le choix de a_n. Il nous reste donc à trouver l'unique réel a_n vérifiant $f(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma_k(n)$, autrement dit poser $a_n = f(n) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Gamma_k(n)$.

b) Il s'agit de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto b^x - \sum_{k=0}^{n} (b-1)^k \Gamma_k(x)$ s'annule pour $j \in [\![0, n]\!]$.
Or d'après la question 1, $\sum_{k=0}^{n} (b-1)^k \Gamma_k(x) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (b-1)^k = (b-1+1)^j = b^j$ donc la suite $((b-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien associée à la fonction $x \mapsto b^x$.

Question 5.

a) Observons déjà que compte tenu de la question 4a, l'égalité demandée est vraie pour tout $x \in [\![0,\mathrm{N}]\!]$ quel que soit le choix de θ puisque dans ce cas $\Gamma_{\mathrm{N}+1}(x) = 0$.

Supposons maintenant x différent des entiers $0, 1, \ldots, \mathrm{N}$ et considérons la fonction $g : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k\Gamma_k(t) - \mathrm{A}\Gamma_{\mathrm{N}+1}(t)$, la constante A étant choisie de telle sorte que $g(x) = 0$. Ce choix de A est toujours possible puisque si $x \notin [\![0,\mathrm{N}]\!]$ on a $\Gamma_{\mathrm{N}+1}(x) \neq 0$.

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et possède au moins $\mathrm{N}+2$ zéros : les entiers $0, 1, \ldots, \mathrm{N}$ et le réel x. D'après le théorème de Rolle, g' possède au moins $\mathrm{N}+1$ zéros, g'' au moins N zéros, et ainsi de suite jusqu'à la fonction $g^{(\mathrm{N}+1)}$ qui possède au moins un zéro que l'on note θ.

Or $g^{(\mathrm{N}+1)}(t) = f^{(\mathrm{N}+1)}(t) - \mathrm{A}$ donc $\mathrm{A} = f^{(\mathrm{N}+1)}(\theta)$ et l'égalité $g(x) = 0$ s'écrit alors $f(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k\Gamma_k(x) + \Gamma_{\mathrm{N}+1}(x) f^{(\mathrm{N}+1)}(\theta)$.

b) Si $n = 0$ on a déjà vu que $a_0 = f(0)$ donc on peut poser $\lambda_0 = 0$.

Si $n \geqslant 1$, appliquons le résultat précédent à l'entier $\mathrm{N} = n-1$ et au réel $x = n$: il existe un réel θ tel que $f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\Gamma_k(n) + \Gamma_n(n) f^{(n)}(\theta)$. Mais par ailleurs d'après la question 4a on a $f(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(n)$ donc $a_n = f^{(n)}(\theta)$ et il suffit de poser $\lambda_n = \theta$.

Partie III.

Question 6.

a) Pour $n \geqslant x$ on a $\dfrac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{\rho}\Big|\dfrac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)}\Big| = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{\rho}\dfrac{n-x}{n+1} = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{\rho}\Big(1-\dfrac{x+1}{n+1}\Big)$ donc

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \Big(1+\frac{\rho}{n}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big(1-\frac{x+1}{n}+\mathrm{O}\big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) = 1+\frac{\rho-x-1}{n}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \quad \text{et} \quad \ln(\mu_{n+1})-\ln(\mu_n) = \frac{\rho-x-1}{n}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

On en déduit que la série $\sum\big(\ln(\mu_{n+1})-\ln(\mu_n)\big)$ converge lorsque $\rho = x+1$, et diverge sinon.

b) Par télescopage on en déduit que la suite $(\ln(\mu_n))$ tend vers $-\infty$ si $\rho < x+1$, tend vers une limite finie ℓ_x si $\rho = x+1$, et diverge vers $+\infty$ si $\rho > x+1$.

Ainsi, la suite (μ_n) tend vers 0 lorsque $\rho < x+1$, tend vers une limite $\mathrm{e}^{\ell_x} > 0$ lorsque $\rho = x+1$, et diverge vers $+\infty$ lorsque $\rho > x+1$. En notant $\mathrm{K}(x) = \mathrm{e}^{\ell_x}$ on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{x+1}|\Gamma_n(x)| = \mathrm{K}(x)$.

Question 7.

a) Notons déjà que par définition de la suite (a_n), si x est un entier naturel alors la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n\Gamma_n(x)$ est constante égale à $f(x)$ à partir du rang x (question 4a).

Considérons maintenant un réel non entier $x > 0$. D'après la question 5a il existe un réel $\theta \geqslant 0$ tel que

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\Gamma_k(x)\Big| = \Big|\Gamma_n(x) f^{(n)}(\theta)\Big| \leqslant \mathrm{M}n\Big|\Gamma_n(x)\Big|.$$

D'après la question 6b, $n|\Gamma_n(x)| \sim \dfrac{\mathrm{K}(x)}{n^x}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Big|\Gamma_n(x)\Big| = 0$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\Gamma_k(x) = f(x)$.

Nous avons donc prouvé la convergence simple de $\sum a_k\Gamma_k$ vers f sur $[0,+\infty[$.

b) On a obtenu à la question 4a une formule de récurrence pour calculer les termes de la suite (a_n) : $a_0 = f(0)$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = f(n) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\Gamma_k(n)$. Lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = 0$, il est facile de prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$, et compte tenu de la question précédente, f est la fonction nulle sur $[0,+\infty[$.

Question 8. On a $|a_n\Gamma_n(y)| = |a_n\Gamma_n(x)| \times \Big|\dfrac{\Gamma_n(y)}{\Gamma_n(x)}\Big|$ (on a $x \notin \mathbb{N}$ donc $\Gamma_n(x) \neq 0$). D'après la question 6b, $\Big|\dfrac{\Gamma_n(y)}{\Gamma_n(x)}\Big| \sim \dfrac{\mathrm{K}(y)}{\mathrm{K}(x)} n^{x-y}$ avec $x < y$ donc $|a_n\Gamma_n(y)| = \mathrm{o}\big(|a_n\Gamma_n(x)|\big)$. On en déduit que la série $\sum a_n\Gamma_n(y)$ est absolument convergente.

Question 9.

a) Si x est un entier naturel, la suite $\big(\Gamma_n(x)\big)$ est nulle à partir d'un certain rang et la série $\sum h^n\Gamma_n(x)$ converge.

Si x n'est pas un entier naturel, appliquons le critère de d'Alembert : $\left|\dfrac{h^{n+1}\Gamma_{n+1}(x)}{h^n\Gamma_n(x)}\right| = |h|\dfrac{|n-x|}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{h^{n+1}\Gamma_{n+1}(x)}{h^n\Gamma_n(x)}\right| = |h| < 1$; la série $\sum h^n\Gamma_n(x)$ converge absolument. Lorsque $|h| < 1$ la série $\sum h^n\Gamma_n(x)$ est donc absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Lorsque $|h| > 1$ le critère de d'Alembert indique, lorsque x n'est pas un entier naturel, que cette fois la série $\sum h^n\Gamma_n(x)$ diverge. La convergence n'est alors plus assurée que lorsque $x \in \mathbb{N}$.

c) Comme aux questions précédentes, il y a convergence lorsque $x \in \mathbb{N}$ puisqu'alors la suite $(\Gamma_n(x))$ est nulle à partir d'un certain rang.

Supposons maintenant que x ne soit pas un entier naturel.

D'après la question 6b, $|\Gamma_n(x)| \sim \dfrac{\mathrm{K}(x)}{n^{x+1}}$ donc si $x \leqslant -1$ la série diverge grossièrement (le terme général ne tend pas vers 0) et si $x > -1$ la série converge absolument par comparaison aux séries de Riemann.

Considérons la fonction $f : x \mapsto 2^x$, définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$. D'après la question 4b la suite (a_n) associée à f est la suite $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question 5a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un réel $\theta > -1$ tel que $2^x - \sum\limits_{k=0}^{n}\Gamma_k(x) = \Gamma_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\theta) = \Gamma_{n+1}(x)(\ln 2)^{n+1}2^{\theta}$.

Pour $n \geqslant x$ le signe de $\Gamma_{n+1}(x)$ est alterné ; il en est donc de même de la quantité $2^x - \sum\limits_{k=0}^{n}\Gamma_k(x)$. Nous avons donc suivant la parité de n :

$$\sum_{k=0}^{n}\Gamma_k(x) \leqslant 2^x \leqslant \sum_{k=0}^{n+1}\Gamma_k(x) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k=0}^{n+1}\Gamma_k(x) \leqslant 2^x \leqslant \sum_{k=0}^{n}\Gamma_k(x).$$

Sachant que la série converge on obtient par passage à la limite : $2^x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\Gamma_k(x)$.