# Corrigé : séries entières, sommes doubles et probabilités (Centrale PC 2023)

## I Utilisation de séries entières

### *I. A – Une première formule*

**Q 1.** Le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est égal à 1.

**Q 2.** La série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ a même rayon de convergence que sa série dérivée $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$ donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} nx^n$ est égal à 1, et $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

**Q 3.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n) = k!\dbinom{n}{k}x^{n-k}$ donc le rayon de convergence de $\sum \dbinom{n}{k}x^n$ est égal à 1, et pour tout $x \in \,]-1,1[$, $\sum_{n\geqslant k} k!\dbinom{n}{k}x^{n-k} = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\Big(\dfrac{1}{1-x}\Big) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\dbinom{n}{k}x^k = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

### *I. B – Utilisation d'une famille de polynômes*

**Q 4.** D'après le crière de d'Alembert le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^k x^n$ est égal à 1 donc $f_k$ est définie au moins sur $]-1,1[$ et au plus sur $[-1,1]$. Or pour $x = \pm 1$ le terme général de la série ne tend pas vers 0 donc $f_k$ est exactement définie sur $]-1,1[$.

**Q 5.** La famille $(\mathrm{H}_0,\dots,\mathrm{H}_k)$ est une famille échelonnée en degré de $k+1$ polynômes de $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ donc en constitue une base ; on note $(\alpha_{k,0},\dots,\alpha_{k,k})$ les composantes de $\mathrm{X}^k$ dans cette base.

**Q 6.** L'égalité $0^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j}\mathrm{H}_j(0)$ donne $\alpha_{k,0} = 0^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$, et en identifiant les termes de plus haut degré on obtient $\alpha_{k,k} = \dfrac{1}{k!}$.

**Q 7.** Pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $j^k = \sum_{i=0}^{k}\alpha_{k,i}\mathrm{H}_i(j)$. Or $\mathrm{H}_i(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leqslant i-1 \\ \dbinom{j}{i} & \text{si } j \geqslant i\end{cases}$ donc $j^k = \sum_{i=0}^{j} k\dbinom{j}{i}\alpha_{k,i} = \alpha_{k,j} + \sum_{i=0}^{j-1}\dbinom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

**Q 8.** On peut écrire une fonction récursive résultat de la question précédente :

```python
def alpha(k, j):
    assert j <= k
    if k == 0:
        return 1
    elif j == 0:
        return 0
    else:
        s = j ** k
        for i in range(j):
            s -= binome(j, i) * alpha(k, i)
    return s
```

**Q 9.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \,]-1,1[$, $f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\mathrm{H}_j(n)\Big)x^n = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{H}_j(n)x^n$. En effet, il s'agit d'une somme finie de séries convergentes puisque $\mathrm{H}_j(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(n^j)$ (le rayon de convergence de chacune de ces séries entières est donc égal à 1). Or $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{H}_j(n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\dbinom{n}{j}x^n = \dfrac{x^j}{(1-x)^{j+1}}$ d'après la question 3 donc $f_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\dfrac{x^j}{(1-x)^{j+1}} = \dfrac{\mathrm{P}_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ avec $\mathrm{P}_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}x^j(1-x)^{k-j}$.

**Q 10.** On a $P_k = \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k-j} \alpha_{k,j}\binom{k-j}{i}(-1)^i X^{i+j}$ ; d'où la fonction :

```python
def P(k):
    coefs = [0] * (k + 1)
    for j in range(k + 1):
        for i in range(k - j + 1):
            coefs[i + j] += (-1) ** i * binome(k - j, i) * alpha(k ,j)
    return coefs
```

**Q 11.** Pour tout $x \in ]-1,1[$, $P_k(x) = (1-x)^{k+1} f_k(x)$ donc $x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x) = x(1-x)^{k+2} f_k'(x)$.
Or $x f_k'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1} x^n = f_{k+1}(x)$ donc $x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x) = P_{k+1}(x)$.
Le polynôme $P_{k+1} - X(1-X)P_k' - (k+1)XP_k$ possède donc une infinité de racines ; c'est le polynôme nul.

**Q 12.** On a $P_0 = 1$ donc en utilisant cette relation de récurrence on calcule successivement :

$$P_1 = X, \qquad P_2 = X^2 + X, \qquad P_3 = X^3 + 4X^2 + X$$

**Q 13.** Montrons par récurrence sur $k$ que $P_k$ est un polynôme unitaire de degré $k$ :

- c'est vrai pour $k = 0$ ;
- si $k \geqslant 0$, supposons le résultat acquis au rang $k$. Le terme dominant de $X(1-X)P_k'$ est alors égal à $-KX^{k+1}$ et celui de $(k+1)XP_k$ égal à $(k+1)X^{k+1}$ donc d'après la question 11, le terme dominant de $P_{k+1}$ est égal à $X^{k+1}$ ; la récurrence se propage.

**Q 14.** Raisonnons là encore par récurrence sur $k$ :

- si $k = 1$ on a $P_1 = X$ donc pour tout $x \in ]0,1[$, $x^2 P_1\left(\frac{1}{x}\right) = x = P_1(x)$ ;
- supposons pour tout $x \in ]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$ ; alors en dérivant : $(k+1)x^k P_k\left(\frac{1}{x}\right) - x^{k-1}P_k'\left(\frac{1}{x}\right) = P_k'(x)$ donc

$$\begin{aligned} x^{k+2}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) &= x^k(x-1)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1)x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = x(x-1)\left((k+1)x^k P_k\left(\frac{1}{x}\right) - P_k'(x)\right) + (k+1)x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x(1-x)P_k'(x) + (k+1)x^{k+2}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x) = P_{k+1}(x) \end{aligned}$$

  donc la récurrence se propage.

**Q 15.** Posons $P_k = \sum_{j=0}^{k} a_j X^j$ ; pour tout $x \in ]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^{k+1-j} = \sum_{j=1}^{k+1} a_{k+1-j}x^j$. On déduit de la question précédente que $P_k = \sum_{j=1}^{k+1} a_{k+1-j}X^j$ et par unicité de la décomposition dans la base canonique, que $a_0 = 0$ et pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $a_{k+1-j} = a_j$.

### *I. C – Une dernière formule*

**Q 16.** $\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{4n+2}{n+1} \longrightarrow 4$ donc d'après le critère de d'Alembert, $R = \dfrac{1}{4}$.
D'après le cours, pour tout $x \in ]-1/4, 1/4[$,

$$\begin{aligned} (1-4x)^{-1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)\cdots(-(2n-1)/2)}{n!}(-4x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(3)(1)}{2^n n!}4^n x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}4^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n \end{aligned}$$

**Q 17.** Pour tout $x \in ]-1/4,1/4[$, posons $\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}$. D'après la question précédente, cette fonction est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Considérons maintenant la fonction $\psi : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$. On a $\psi(0) = 0$ et $\psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ donc $\phi = \psi$, et ainsi, pour $x \neq 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{\psi(x)}{x} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

**Q 18.** Réalisons le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ sur $]-1/4,1/4[$ (leur intervalle ouvert de convergence commun) pour obtenir pour $x \neq 0$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \times \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} \left( \frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right)$$

**Q 19.** D'après la question 16, $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} x^{n+1}$ donc pour tout $x \in ]-1/4,1/4[ \setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} x^n$$

Cette égalité se prolonge pour $x = 0$, et par unicité du développement en série entière on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}$.

# II Étude de sommes doubles

## *II. A – Applications*

### II. A. 1) Une première application

**Q 20.** Soit $x \in ]-1,1[$.

Si $x = 0$ la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ est la série nulle donc converge.

Si $x \neq 0$, $\left| \frac{nx^n}{1-x^n} \right| \sim n|x|^n$ et $\sum n|x|^n$ converge (question 2) donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge absolument donc converge.

De plus, $\frac{1}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{nk}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n+nk}$.

**Q 21.** Appliquée à $|x|$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} n|x|^{n+nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n|x|^n}{1-|x|^n} < +\infty$ donc la famille est sommable, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n(k+1)}$.

D'après la question 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n(k+1)} = \frac{x^{k+1}}{(1-x^{k+1})^2}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(1-x^{k+1})^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)^2}$.

### II. A. 2) Une seconde application

**Q 22.** $\frac{1}{k^3(k+1)} \sim \frac{1}{k^4}$ et $\sum \frac{1}{k^4}$ converge donc $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$ est le reste d'une série convergente, ce qui montre que $u_n$ est bien défini.

**Q 23.** Posons $a_{n,k} = \begin{cases} \frac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } n \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{k^3(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$ et s'agissant de termes positifs la famille est sommable. On peut donc intervertir l'ordre de sommation, ce qui donne $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = \frac{\pi^2}{6}$.

### *II. B – Contre-exemples*

#### II. B. 1) Un premier contre-exemple

**Q 24.** Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-i}} = -1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existe et est égale à 0.

**Q 25.** $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,0} = -1$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-i}} - 1 = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} - 1 = -\frac{1}{2^j}$.
$\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = 2$ donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existe et est égale à $-2$.

**Q 26.** $-2 \neq 0$ donc la famille $(b_{i,j})$ n'est pas sommable.

#### II. B. 2) Un second contre-exemple

**Q 27.** Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = i - 2i \sum_{j=i+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{j-i} = 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ converge et vaut 0.

**Q 28.** Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - 2\sum_{i=0}^{j-1} i3^{i-j} = j - \frac{2}{3^{j-1}} \sum_{i=1}^{j-1} i3^{i-1}$.
On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} ix^{i-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{i=0}^{j-1} x^i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^j - 1}{x-1}\right) = \frac{jx^{j-1}(x-1) - x^j + 1}{(x-1)^2}$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} i3^{i-1} = \frac{2j3^{j-1} - 3^j + 1}{4}$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{3^j - 1}{3^{j-1}}$.

**Q 29.** $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{3}{2} \neq 0$ donc la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$ diverge.

# III Probabilités

### *III. A – Un conditionnement*

**Q 30.** Par définition d'une loi conditionnelle, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big((X,Y) = (n,k)\big) = \mathbb{P}(Y = k \mid X = n)\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}\, \mathrm{e}^{-n} \frac{n^k}{k!}$$

**Q 31.** $(X = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big((X,Y) = (n,k)\big)$.
Pour $k = 0$ on obtient $\displaystyle\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{p}{\mathrm{e}} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)^{n-1} = \frac{p}{\mathrm{e}} \frac{1}{1 - \frac{1-p}{\mathrm{e}}} = \frac{p}{\mathrm{e} - 1 + p}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on obtient $\displaystyle\mathbb{P}(Y = k) = \frac{p}{(1-p)k!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)^n = \frac{p}{(1-p)k!} f_k\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)$.

**Q 32.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \frac{p}{\mathrm{e}-1+p} + \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} f_k\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right) = \frac{p}{\mathrm{e}-1+p} + \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)^n$. Il s'agit d'une famille sommable de termes positifs donc on peut intervertir les sommes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \frac{p}{\mathrm{e}-1+p} + \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} = \frac{p}{\mathrm{e}-1+p} + \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)^n (\mathrm{e}^n - 1)$$

$$= \frac{p}{\mathrm{e}-1+p} + \frac{p}{1-p}\left(\frac{1-p}{p} - \frac{1-p}{\mathrm{e}} \frac{1}{1 - \frac{1-p}{\mathrm{e}}}\right) = 1.$$

**Q 33.** Y est à valeurs positives donc admet une espérance, finie ou infinie, qui vaut :

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!}f_k\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right) = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^k}{(k-1)!}\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)^n$$

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n^k}{(k-1)!}\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{e}^n\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)^n = f_1(1-p) = \frac{1-p}{p^2} < +\infty$ donc la famille est sommable, et $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \dfrac{1}{p}$.

**Q 34.** On fait de même avec $\mathrm{Y}(\mathrm{Y}-1)$ :

$$\mathbb{E}\big(\mathrm{Y}(\mathrm{Y}-1)\big) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \frac{p}{1-p}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(k-2)!}f_k\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right) = \frac{p}{1-p}\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^k}{(k-2)!}\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)^n$$

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{n^k}{(k-2)!}\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\,\mathrm{e}^n\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)^n = f_2(1-p) = \frac{\mathrm{P}_2(1-p)}{p^3} = \frac{(1-p)(2-p)}{p^3} < +\infty$ donc la famille est sommable, et $\mathbb{E}\big(\mathrm{Y}(\mathrm{Y}-1)\big) = \dfrac{2-p}{p^2}$. On en déduit que Y admet une variance égale à $\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = \mathbb{E}\big(\mathrm{Y}(\mathrm{Y}-1)\big) - \mathbb{E}(\mathrm{Y})^2 + \mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \dfrac{1}{p^2}$.

### *III. B – Pile ou face infini*

**Q 35.** L'événement $\mathrm{A}_n$ est réalisé lorsqu'il y a eu exactement $n$ lancers donnant pile lors des $2n$ premiers lancers, autrement dit : $\mathrm{A}_n = \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\mathrm{X}_k = n\right]$. Dans l'énoncé, il faut lire $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_{2n}$ et pas $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\mathrm{X}_k$ suit une loi binomiale de paramètre $(2n, p)$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \dbinom{2n}{n}p^n(1-p)^n$.

**Q 36.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathrm{B}_n \implies \forall k > n \overline{\mathrm{B}}_k$ donc les événements $(\mathrm{B}_n)$ sont deux à deux incompatibles.

**Q 37.** On a $\mathrm{C} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}\mathrm{B}_n$ donc C est un événement, et d'après la question précédente, $\mathbb{P}(\mathrm{C}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$.

**Q 38.** Lorsque l'événement $\mathrm{A}_n$ est réalisé, il existe un unique $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathrm{B}_k$ est réalisé. Par ailleurs,

$$n = \sum_{i=1}^{2n}\mathrm{X}_i \iff n = \sum_{i=1}^{2k}\mathrm{X}_i + \sum_{i=2k+1}^{2n}\mathrm{X}_i = k + \sum_{i=2k+1}^{2n}\mathrm{X}_i \iff \sum_{i=2k+1}^{2n}\mathrm{X}_i = n-k$$

Mais $\displaystyle\sum_{i=2k+1}^{2n}\mathrm{X}_i$ suis la même loi que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2(n-k)}\mathrm{X}_i$ donc $\mathbb{P}\Big(\displaystyle\sum_{i=2k+1}^{2n}\mathrm{X}_i = n-k\Big) = \mathbb{P}\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{2(n-k)}\mathrm{X}_i = n-k\Big) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n-k})$.

Ainsi, $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{B}_k)\mathbb{P}\Big(\sum_{i=2k+1}^{2n}\mathrm{X}_i = n-k\Big) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{B}_k)\mathbb{P}(\mathrm{A}_{n-k})$.

**Q 39.** Montrons la formule demandée par récurrence sur $n$ :

- si $n = 1$ on a $\mathbb{P}(\mathrm{B}_1) = \mathbb{P}\big((\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = (1,0)\big) + \mathbb{P}\big((\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_1)\big) = 2p(1-p)$ ;
- si $n \geqslant 1$, supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n$ ; alors :

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{B}_k)\mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1-k}) = \binom{2n+2}{n+1}\big(p(1-p)\big)^{n+1} - 2\big(p(1-p)\big)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{2n+2-2k}{n+1-k}\binom{2k-2}{k-1}$$

D'après (I3), $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{2n+2-2k}{n+1-k}\binom{2k-2}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_{n+1}) = \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\big(p(1-p)\big)^{n+1}$$

La récurrence se propage.

**Q 40.** D'après la question 37, $\mathbb{P}(C) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\Big(p(1-p)\Big)^{n+1}$.

Lorsque $p \neq \frac{1}{2}$ on a $p(1-p) < \frac{1}{4}$ et on peut appliquer la formule (I.2) : $\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$.

**Q 41.** Considérons la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ où $g_n(x) = \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}x^{n+1}$, définie sur $[0, 1/4]$. On a $\mathbb{P}(C) = g\Big(p(1-p)\Big)$.

On a $\|g_n\|_\infty = g_n(1/4) = \frac{2}{n+1}\frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{4^{n+1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{3/2}}$ (en utilisant la formule de Stirling). Ceci montre que la série $\sum g_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0, 1/4]$ et par voie de conséquence que la fonction $g$ est continue puisque les fonctions $g_n$ le sont.

On a donc $g(1/4) = \lim_{x \to (1/4)^-} g(x) = \lim_{x \to (1/4)^-} 1 - \sqrt{1-4x} = 1$, ce qui montre que pour $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C) = 1$.