Corrigé : approximation d'une intégrale (Centrale PC 2021)

I Généralités sur les formules de quadrature

I. A – Exemples élémentaires

Q 1. Pour tout polynôme constant $P = \lambda$, $\int_0^1 P(x)\,dx = \lambda = P(0)$. En revanche, pour $P = X$, $\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq P(0)$ donc la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ est d'ordre 0.

Q 2. Pour tout polynôme $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$, $\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{a}{2} + b = P(1/2)$. En revanche, pour $P = X^2$, $\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{3} \neq P(1/2)$ donc la formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$ est d'ordre 1.

Q 3. Par linéarité, pour qu'une formule de quadrature soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ il faut et il suffit qu'elle soit exacte pour les polynômes 1, X et X^2, ce qui conduit aux conditions :

$$\begin{cases} 1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1/2 = \lambda_1/2 + \lambda_2 \\ 1/3 = \lambda_1/4 + \lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0 = 1/6 \\ \lambda_1 = 2/3 \\ \lambda_2 = 1/6 \end{cases}$$

En revanche, pour $P = X^3$ on a $\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{4} \neq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{6}$ donc pour ces valeurs de λ_i la formule $I_2(f)$ est d'ordre 2.

I. B – Construction de formules d'ordre quelconque

Q 4. Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $\deg P \leqslant n$ et P s'annule au moins $n+1$ fois donc $P = 0$. On en déduit que φ est injective, puis, sachant que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, que φ est un isomorphisme.

Q 5. Si $(e_0, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, en posant $L_k = \varphi^{-1}(e_k)$ on définit une famille de polynômes qui vérifient $\varphi(L_i) = e_i$, soit : $\forall j \in /cro0, n$, $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

Q 6. L'image d'une base par l'isomorphisme φ^{-1} est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 7. Par linéarité, pour une formule de quadrature soit exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ il faut et il suffit qu'elle soit exacte sur une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En prenant pour base la base de Lagrange on obtient les conditions : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_j = I_n(L_j) = \int_I L_j(x)\omega(x)\,dx$.

Q 8. On a $L_0 = \frac{(X-1/2)(X-1)}{(0-1/2)(0-1)} = 2X^2 - 3X + 1$ donc $\lambda_0 = \int_0^1 (2x^2 - 3x + 1)\,dx = \frac{1}{6}$.
$L_1 = \frac{X(X-1)}{1/2(1/2-1)} = 4(X - X^2)$ donc $\lambda_0 = 4\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{2}{3}$.
$L_2 = \frac{X(X-1/2)}{1-1/2} = 2X^2 - X$ donc $\lambda_0 = \int_0^1 (2x^2 - x)\,dx = \frac{1}{6}$. On retrouve bien les valeurs de Q3.

I. C – Noyau de Peano et évaluation de l'erreur

Q 9. D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre m, $f(x) = P_m(x) + R_m(x)$ où $P(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ et $R_m(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)\,dt = \frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\,dt$.
Puisque la formule de quadrature est d'ordre m on a $e(P_m) = 0$, et ainsi, par linéarité, $e(f) = e(R_m)$.

Q 10. Considérons la fonction K_m définie dans l'énoncé. On a :

$$\frac{1}{m!}\int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t)\,dt = \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1}(t)\omega(x)\,dx\right)dt - \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_a^b \varphi_m(x_j,t) f^{(m+1)}(t)\,dt$$

D'après la formule d'inversion admise par l'énoncé,

$$\frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\omega(x)\,dx\right)dt = \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\,dt\right)\omega(x)\,dx = \int_a^b R_m(x)\omega(x)\,dx$$

donc $\frac{1}{m!}\int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t)\,dt = \int_a^b R_m(x)\omega(x)\,dx - \sum_{j=0}^{m} \lambda_j R_m(x_j) = e(R_m) = e(f)$.

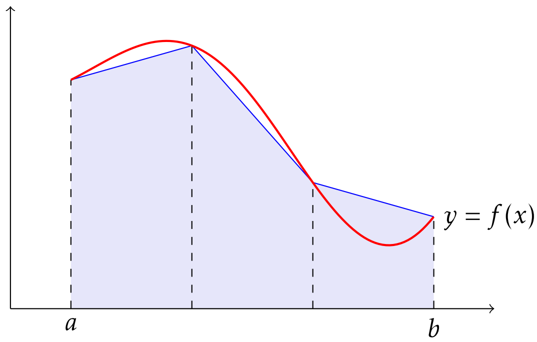
I. D – *Exemple : méthode des trapèzes*

Q 11. $\mathrm{K}_1(t) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_1(x,t)\,\mathrm{d}x - \lambda_0\varphi_1(0,t) - \lambda_1\varphi_1(1,t) = \int_t^1 (x-t)\,\mathrm{d}x - \frac{1-t}{2} = -\frac{t(1-t)}{2}$.

D'après la question 10, $e(g) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t(1-t)}{2} g''(t)\,\mathrm{d}t$ donc

$$|e(g)| \leqslant \|g''\|_\infty \int_0^1 \frac{t(1-t)}{2}\,\mathrm{d}t = \|g''\|_\infty \Big[-\frac{t(1-t)}{4} - \frac{(1-t)^3}{12}\Big]_0^1 = \frac{1}{12}\|g''\|_\infty$$

Q 12. La méthode des trapèzes pour $n = 3$. $\mathrm{T}_3(f)$ est l'aire colorée en bleu.



Q 13. D'après la relation de Chasles, $e(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{h}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\Big)$. Le changement de variable $y = \dfrac{x-a_k}{h}$ donne :

$$e(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f(a_k+hy)\,\mathrm{d}y - \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\Big) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_0^1 g_k(y)\,\mathrm{d}y - \frac{g_k(0)+g_k(1)}{2}\Big) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e(g_k)$$

en ayant posé $g_k : y \mapsto f(a_k + hy)$.

Q 14. On en déduit $|e_n(f)| \leqslant \dfrac{b-a}{12n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\|g_k''\|_{\infty,[0,1]}$. De plus, $g_k''(y) = h^2 f''(a_k+hy)$ donc $\|g''\|_{\infty,[0,1]} \leqslant h^2\|f''\|_{\infty,[a,b]}$ et ainsi, $|e_n(f)| \leqslant \dfrac{b-a}{12n} \times nh^2\|f''\|_\infty = \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty$.

II Polynômes orthogonaux et applications

II. A – *étude d'un produit scalaire*

Q 15. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2+b^2-2|ab| = (|a|-|b|)^2 \geqslant 0$ donc $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$. En particulier, $|fg\omega| = |f\sqrt{\omega}g\sqrt{\omega}| \leqslant \dfrac{1}{2}(f^2\omega + g^2\omega)$. Les fonction $f^2\omega$ et $g^2\omega$ sont intégrables donc leur somme aussi, et par suite $fg\omega$ est intégrable.

Q 16. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur I : E contient la fonction nulle, et pour tout $(f,g) \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)^2\omega = \lambda^2 f^2\omega + 2\lambda fg\omega + g^2\omega$ est la somme de trois fonctions intégrables donc est intégrable, *i.e.* $\lambda f + g \in \mathrm{E}$.

Q 17. $\langle f \mid g\rangle$ est bien défini d'après la question 15. La bilinéarité résulte de la linéarité de l'intégrale ; la symétrie est évidente, et la positivité résulte de la positivité de l'intégrale. Enfin, si $\langle f \mid f\rangle = 0$ alors, la fonction $f^2\omega$ étant positive et continue, pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $f(x)^2\omega(x) = 0$, et ω ne s'annulant pas, $f = 0$. On a donc bien défini un produit scalaire.

II. B – *Polynômes orthogonaux associés à un poids*

Q 18. Supposons que p_n possède strictement moins de n racines distinctes dans $\mathring{\mathrm{I}}$. Alors $\deg q \leqslant n$ donc $q \in \mathrm{Vect}(p_0,\dots,p_{n-1})$ et par linéarité, $\langle p_n \mid q\rangle = 0$.
Mais toutes les racines de p_n qui sont dans $\mathring{\mathrm{I}}$ sont racines d'ordre pair de p_nq ; ainsi, ce polynôme garde un signe constant sur $\mathring{\mathrm{I}}$, et par continuité l'égalité $\langle p_n \mid q\rangle = 0$ implique que p_nq s'annule sur I. Ce polynôme possède alors une infinité de racines donc est le polynôme nul, ce qui est absurde. On en déduit que $\deg q = n$, autrement dit que p_n possède n racines distinctes dans $\mathring{\mathrm{I}}$.

II.C – Applications : méthodes de quadrature de Gauss

Q 19. Il s'agit de trouver un polynôme de degré $2n+2$ pour lequel la formule de quadrature n'est pas exacte. Le polynôme suggéré étant de degré $n+1$, essayons son carré : $\mathrm{P} = \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - x_k)^2$. Il s'agit d'un polynôme non nul à valeurs positives donc $\int_{\mathrm{I}} \mathrm{P}(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x > 0$. *A contrario*, $\mathrm{I}_n(\mathrm{P}) = 0$ donc on a nécessairement $m \leqslant 2n+1$.

Q 20. Supposons que les x_i soient les racines de p_{n+1}, et considérons un polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n+1$. La division euclidienne de P par p_{n+1} s'écrit $\mathrm{P} = p_{n+1}\mathrm{Q} + \mathrm{R}$ avec $\deg \mathrm{R} \leqslant n$ et $\deg \mathrm{Q} \leqslant n$.
On a $\mathrm{Q} \in \mathrm{Vect}(p_0, \dots, p_n)$ donc $\langle p_{n+1} \mid \mathrm{Q} \rangle = 0$. Ainsi, $\int_{\mathrm{I}} \mathrm{P}(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{I}} \mathrm{R}(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_n(\mathrm{R})$ puisque la méthode est au moins d'ordre n.
Par ailleurs, $\mathrm{I}_n(\mathrm{P}) = \mathrm{I}_n(p_{n+1}\mathrm{Q}) + \mathrm{I}_n(\mathrm{R}) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k p_{n+1}(x_k)\mathrm{Q}(x_k) + \mathrm{I}_n(\mathrm{R}) = \mathrm{I}_n(\mathrm{R})$ donc $\int_{\mathrm{I}} \mathrm{P}(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_n(\mathrm{P})$. Ceci montre que la méthode de quadrature est au moins d'ordre $2n+1$, donc d'ordre $2n+1$ d'après la question précédente.
Réciproquement, supposons la méthode d'ordre $2n+1$. Elle est donc exacte pour le polynôme $\mathrm{P}_n\mathrm{L}_k$ qui est de degré $2n+1$:
$\int_{\mathrm{I}} p_{n+1}(x)\mathrm{L}_k(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_k \mathrm{L}_k(x_j)p_{n+1}(x_j) = \lambda_k p_{n+1}(x_k)$.
Par ailleurs, $\deg \mathrm{L}_n < \deg p_{n+1}$ donc $\langle \mathrm{L}_k \mid p_{n+1} \rangle = 0$, ce qui implique $\lambda_k p_{n+1}(x_k) = 0$. Il reste à montrer qu'aucun des λ_k ne peut être nul pour pouvoir conclure que les x_k sont les $n+1$ racines distinctes de p_{n+1} dans $\mathring{\mathrm{I}}$:
Sachant que la méthode est d'ordre $2n+1$, elle est exacte pour le polynôme L_k^2 et ainsi $\lambda_k^2 = \int_{\mathrm{I}} \mathrm{L}_k(x)^2\omega(x)\,\mathrm{d}x > 0$ puisque L_k n'est pas le polynôme nul donc $\lambda_k \neq 0$.

II.D – Exemples 1

Q 21. On a $p_0 = 1$. On pose $p_1 = x + a$ et la condition $\int_{-1}^{1} p_0(x)p_1(x)\,\mathrm{d}x = 0$ donne $p_1 = x$.
On pose $p_2 = x^2 + ax + b$. Les conditions $\int_{-1}^{1} p_0(x)p_2(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_{-1}^{1} p_1(x)p_2(x)\,\mathrm{d}x = 0$ donnent $\frac{2}{3} + 2b = 0$ et $\frac{2}{3}a = 0$ donc $p_2 = x^2 - 1/3$.
On pose $p_3 = x^3 + ax^2 + bx + c$. Les conditions $\int_{-1}^{1} p_j(x)p_3(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour $j \in \{0,1,2\}$ donnent $\frac{2}{3}a + 2c = 0$, $\frac{2}{5} + \frac{2}{3}b = 0$ et $\frac{8}{45}a = 0$ donc $p_3 = x^3 - \frac{3}{5}x$.

Q 22. Posons $x_0 = -\sqrt{3/5}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{3/5}$. Ce sont les racines de p_3 donc d'après la question 20 on obtient une méthode d'ordre 5 en choisissant (en posant $\alpha = \sqrt{3/5}$) :

$$\lambda_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x(x-\alpha)}{2\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{9}, \qquad \lambda_1 = \int_{-1}^{1} \frac{(x+\alpha)(x-\alpha)}{-\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{9}, \qquad \lambda_2 = \int_{-1}^{1} \frac{x(x+\alpha)}{2\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{9}$$

La formule de quadrature est donc $\mathrm{I}_3(f) = \frac{5}{9}f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{3/5})$.

II.E – Exemple 2

Q 23. Au voisinage de 1, $x^k\omega(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégrable sur $[0,1[$ donc $x \mapsto x^k\omega(x)$ aussi.
Au voisinage de -1, $|x^k|\omega(x) \underset{-1}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ est intégrable sur $]-1,0[$ donc $x \mapsto x^k\omega(x)$ aussi.
On en déduit que $x \mapsto x^k\omega(x)$ est intégrable sur I.

Q 24. $\mathrm{Q}_0(x) = 1$, $\mathrm{Q}_1(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $2\cos\theta\cos(n+1)\theta = \cos(n+2)\theta + \cos(n\theta)$ donc pour $\theta = \arccos(x)$, $\mathrm{Q}_{n+2}(x) = 2x\mathrm{Q}_{n+1}(x) - \mathrm{Q}_n(x)$.

Q 25. On démontre par récurrence sur n que Q_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant égal à 1 si $n = 0$ et à 2^{n-1} sinon.

Q 26. Posons $p_0 = Q_0 = 1$ et $p_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}Q_n$ pour $n \geqslant 1$. Il s'agit d'une famille de polynômes unitaires échelonnée en degré. De plus, pour $i \neq j$, le changement de variable $x = \cos\theta$ conduit à :

$$\langle p_i \mid p_j\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{p_i(x)p_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} \cos(i\theta)\cos(j\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Big(\cos(i+j)\theta + \cos(i-j)\theta\Big)d\theta = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(i+j)\theta}{i+j} + \frac{\sin(i-j)\theta}{i-j}\Big]_0^{\pi} = 0$$

donc il s'agit bien de la suite de polynômes orthogonaux associée au poids ω.

Q 27. La formule de quadrature est d'ordre maximal lorsqu'on choisit pour $x_0, \dots, x_n$ les racines de Q_{n+1} (question 20). Si on pose $\theta = \arccos(x)$ pour $x \in [-1,1]$ alors $Q_{n+1}(x) = 0 \iff \theta \equiv \dfrac{\pi}{2(n+1)} \mod \Big(\dfrac{\pi}{n+1}\Big)$. Ceci nous donne $n+1$ racines dans $[-1,1]$ (il ne peut donc y en avoir d'autre puisque $\deg Q_{n+1} = n+1$) : $x_{n-k} = \cos\Big(\dfrac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\Big)$, $k \in [\![0,n]\!]$ (ils sont numérotés de sorte à avoir $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$).

III Accélération de la méthode des trapèzes

III. A – Nombres b_m et polynômes B_m

Q 28. Soit $0 < \rho < R$. La suite $(\alpha_n\rho^n)$ est bornée donc il existe $M \geqslant 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha|\rho^n \leqslant M$, soit $|\alpha| \leqslant M\rho^{-n}$. Pour $q \geqslant M\rho^{-1}$ on a (car $M \geqslant 1$) $|\alpha_n| \leqslant M\rho^{-n} \leqslant (M\rho^{-1})^n \leqslant q^n$.

Q 29. On peut réaliser le produit de Cauchy de S et de 1/S au voisinage de 0 pour obtenir : $1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p+q=n}\alpha_p\beta_q\Big)z^n$.

Par unicité du développement en série entière on en déduit $\alpha_0\beta_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{p+q=n}\alpha_p\beta_q = 0$ soit $\beta_0 = 1$ et $\beta_n = -\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\alpha_p\beta_{n-p}$ pour $n \geqslant 1$.

On montre alors par récurrence sur n que $|\beta_n| \leqslant (2q)^n$:

- c'est vrai pour $n = 1$;
- si $n \geqslant 1$, supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$; alors :

$$|\beta_n| \leqslant \sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|.|\beta_{n-p}| \leqslant \sum_{p=1}^{n} q^n(2q)^{n-p} = q^n\sum_{p=1}^{n}2^{n-p} = q^n(2^n-1)) \leqslant (2q)^n$$

  donc la récurrence se propage.

Q 30. Réciproquement, considérons la suite (β_n) définie par les relations de récurrence obtenues à la question 29. Toujours d'après cette question, on a $|\beta_n| \leqslant (2q)^n$ donc le rayon de convergence de la série $\sum\beta_n z^n$ est supérieur ou égal à $1/(2q)$. Pour $|z| \leqslant 1/(2q)$ on peut réaliser le produit de Cauchy des séries $\sum\alpha_n z^n$ et $\sum\beta z^n$ et par construction on obtient : $\Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n z^n\Big) = 1$, ce qui montre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n z^n = \frac{1}{S(z)}$ lorsque $|z| \leqslant 1/(2q)$. Nous avons bien montré que 1/S est développable en série entière au voisinage de 0.

Q 31. La fonction $S : z \mapsto \dfrac{e^z - 1}{z}$ (prolongée par continuité en posant $S(0) = 1$) est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ donc d'après la question précédente, son inverse est développable en série entière au voisinage de 0. Il existe donc $r > 0$ tel que $0 \leqslant |z| < r$ implique $\dfrac{z}{e^z - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}z^n$ (l'unicité de la suite (b_n) résulte de l'unicité du développement en série entière).

Q 32. Le produit de Cauchy obtenu à la question 29 peut être réutilisé ici avec $\alpha_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$ et $\beta_n = \dfrac{b_n}{n!}$, ce qui donne $b_0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{q=0}^{n}\alpha_{n-q}\beta_q = 0$ pour $n \geqslant 1$ soit $\displaystyle\sum_{q=0}^{n}\frac{b_q}{q!(n-q+1)!} = 0$ pour $n \geqslant 1$, ou encore $\displaystyle\sum_{q=0}^{n-1}\binom{n}{q}b_q = 0$ pour $n \geqslant 2$ en ré-indéxant.

Q 33. Pour $n = 2$, 3, 4 et 5 on obtient : $b_0 + 2b_1 = 0$, $b_0 + 3b_1 + 3b_2 = 0$, $b_0 + 4b_1 + 6b_2 + 4b_3 = 0$ et $b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3 + 5b_4 = 0$, relations qui permettent d'obtenir $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{6}$, $b_3 = 0$ et $b_4 = -\dfrac{1}{30}$.

Q 34. Calculons $\dfrac{z}{\mathrm{e}^z-1}-b_0-b_1z=\dfrac{(1+z/2)-(1-z/2)\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-1}=\dfrac{(1+z/2)\mathrm{e}^{-z/2}-(1-z/2)\mathrm{e}^{z/2}}{\mathrm{e}^{z/2}-\mathrm{e}^{-z/2}}$. On constate que cette quantité est paire. Étant développable en série entière, tous ses coefficients de rang impair sont nuls, ce qui se traduit par $b_{2p+1}=0$ pour $p\geqslant 1$.

Q 35. D'après la question 33, $\mathrm{B}_0=1$, $\mathrm{B}_1=\mathrm{X}-\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{B}_2=\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+\dfrac{1}{6}$, $\mathrm{B}_3=\mathrm{X}^3-\dfrac{3}{2}\mathrm{X}^2+\dfrac{1}{2}\mathrm{X}$, $\mathrm{B}_4=\mathrm{X}^4-2\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2-\dfrac{1}{30}$.

Remarque. Ces polynômes sont les polynômes de Bernoulli.

Q 36. La relation obtenue à la question 32 donne pour tout $\geqslant 2$, $\mathrm{B}_m(1)-b_m=0$, soit $\mathrm{B}_m(1)=b_m=\mathrm{B}_m(0)$.

Pour tout $m\geqslant 1$, $\mathrm{B}'_m(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}(m-k)\binom{m}{k}b_kx^{m-1-k}=\sum_{k=0}^{m-1}m\binom{m-1}{k}x^{m-1-k}=m\mathrm{B}_{m-1}$.

III. B – Développement asymptotique de l'erreur dans la méthode des trapèzes

Q 37. Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$ on applique sur l'intervalle $[k,k+1]$ le schéma d'intégration par parties suivant : $\left|\begin{array}{l|cc} + & g(x) & 1 \\ - & g'(x) & x-k-1/2\end{array}\right|$ pour obtenir :

$$\int_k^{k+1}g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{g(k)+g(k+1)}{2}-\int_k^{k+1}g'(x)\Big(x-k-\frac{1}{2}\Big)\mathrm{d}x=\frac{g(k)+g(k+1)}{2}-\int_k^{k+1}g'(x)\mathrm{B}_1(x-\lfloor x\rfloor)\,\mathrm{d}x$$

car $\mathrm{B}_1(x)=x-\dfrac{1}{2}$ et sur $]k,k+1[$, $\lfloor x\rfloor=k$. On conclut à l'aide de la relation de Chasles.

Q 38. Sur l'intervalle $[k,k+1]$, l'intégration par parties suivante : $\left|\begin{array}{l|cc} + & g^{(p-1)}(x) & p\mathrm{B}_{p-1}(x-k) \\ - & g^{(p)}(x) & \mathrm{B}_p(x-k)\end{array}\right|$ donne :

$$p\int_k^{k+1}\mathrm{B}_{p-1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p-1)}(x)\,\mathrm{d}x=b_p\Big(g^{(p-1)}(k+1)-g^{(p-1)}(k)\Big)-\int_k^{k+1}\mathrm{B}_p(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x$$

soit encore : $\dfrac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\displaystyle\int_k^{k+1}\mathrm{B}_{p-1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p-1)}(x)\,\mathrm{d}x-\dfrac{(-1)^p}{p!}\int_k^{k+1}\mathrm{B}_p(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^{p-1}\dfrac{b_p}{p!}\Big(g^{(p-1)}(k+1)-g^{(p-1)}(k)\Big)$.
Par télescopage on obtient en sommant pour $p\in[\![2,m]\!]$:

$$-\int_k^{k+1}\mathrm{B}_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{(-1)^m}{m!}\int_k^{k+1}\mathrm{B}_p(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{p=2}^{m}(-1)^{p-1}\frac{b_p}{p!}\Big(g^{(p-1)}(k+1)-g^{(p-1)}(k)\Big)$$

En sommant cette fois pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ on obtient :

$$\begin{aligned}-\int_0^{n}\mathrm{B}_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{(-1)^m}{m!}\int_0^{n}\mathrm{B}_p(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{p=2}^{m}(-1)^{p-1}\frac{b_p}{p!}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(g^{(p-1)}(k+1)-g^{(p-1)}(k)\Big)\\&=\sum_{p=2}^{m}(-1)^{p-1}\frac{b_p}{p!}\Big(g^{(p-1)}(n)-g^{(p-1)}(0)\Big)\end{aligned}$$

Il reste à reporter dans la relation obtenue à la question 37 pour obtenir le résultat demandé.

Q 39. Considérons la fonction $g:[0,n]\to\mathbb{R}$ définie par $g(y)=f\Big(a+y\dfrac{b-a}{n}\Big)$. Le changement de variable $x=a+y\dfrac{b-a}{n}$ donne : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{n}\int_0^n g(y)\,\mathrm{d}y$. La question 38 (en remplaçant m par $2m$) donne alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{T}_n(f)+\frac{b-a}{n}\sum_{p=2}^{2m}\frac{(-1)^{p-1}b_p}{p!}\Big(g^{(p-1)}(n)-g^{(p-1)}(0)\Big)+\frac{1}{(2m)!}\frac{b-a}{n}\int_0^n\mathrm{B}_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(2m)}(x)\,\mathrm{d}x$$

On a $g^{(k)}(y)=\Big(\dfrac{b-a}{n}\Big)^kf^{(k)}\Big(a+y\dfrac{b-a}{n}\Big)$ et $b_{2k+1}=0$ pour $k\geqslant 1$ donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=\mathrm{T}_n(f)-\sum_{p=1}^{m}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^{2p}\Big(f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)\Big)+\frac{1}{(2m)!}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^{2m+1}\int_0^n\mathrm{B}_m(x-\lfloor x\rfloor)f^{(2m)}\Big(a+\frac{b-a}{n}x\Big)\mathrm{d}x\\&=\mathrm{T}_n(f)-\sum_{p=1}^{m}\frac{\gamma_{2p}}{n^{2p}}+\rho_{2m}(n)\qquad\text{avec}\quad\rho_{2m}(n)=\frac{1}{(2m)!}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^{2m+1}\int_0^n\mathrm{B}_m(x-\lfloor x\rfloor)f^{(2m)}\Big(a+\frac{b-a}{n}x\Big)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Puisque $x-\lfloor x\rfloor \in [0,1]$ on dispose de la majoration suivante :

$$\left|\int_0^n \mathrm{B}_m(x-\lfloor x\rfloor) f^{(2m)}\Big(a+\frac{b-a}{n}x\Big)\mathrm{d}x\right| \leqslant \|f^{(2m)}\|_{\infty,[a,b]}.\|\mathrm{B}_{2m}\|_{\infty,[0,1]}\int_0^n \mathrm{d}x = n.\|f^{(2m)}\|_{\infty,[a,b]}.\|\mathrm{B}_{2m}\|_{\infty,[0,1]}$$

ce qui donne la majoration $|\rho_{2m}(n)| \leqslant \dfrac{\mathrm{C}_{2m}}{n^{2m}}$ avec $\mathrm{C}_{2m} = \dfrac{(b-a)^{2m+1}}{(2m)!}\|f^{(2m)}\|_{\infty,[a,b]}.\|\mathrm{B}_{2m}\|_{\infty,[0,1]}$ (l'énoncé à oublié de préciser que cette constante C_{2m} dépend aussi de f).