

# ÉTUDE D'UN OPÉRATEUR INTÉGRAL (CENTRALE PSI 2022)

Durée : 4 heures

## Objectif

Ce problème propose d'étudier quelques propriétés d'un *opérateur intégral*  $U$  défini sur un espace préhilbertien réel  $E$ . Cet espace et son produit scalaire sont introduits dans la partie II et l'opérateur  $U$  est étudié dans la partie III. Dans la partie IV, on s'intéresse à l'étude d'une famille d'équations différentielles à un paramètre pour lesquelles on recherche des solutions développables en séries entières. Enfin, la partie V fait le lien entre les vecteurs propres de l'endomorphisme  $U$  et les solutions des équations différentielles trouvées dans de la partie IV.

## Liens entre les différentes parties

- Les parties I et II sont très largement indépendantes à l'exception de la définition de la fonction  $k_x$ .
- La partie III utilise les résultats de la partie II ainsi que la condition d'appartenance à  $E$  établie dans la partie I.
- La partie IV fait ponctuellement appel à l'espace  $E$  défini et étudié dans les parties I et II. Elle est indépendante de la partie III.
- La partie V utilise les résultats des parties III et IV ainsi que le résultat de la question 3.

## Notations

On note  $E$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  telles que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} dt$  converge.

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , on note  $p_\alpha$  la fonction  $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^\alpha \end{array} \right.$ .

## I Préliminaires : étude de quelques éléments de $E$

### I.A – Des fonctions de $E$ utiles pour la suite

**Q 1.** Montrer que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $p_\alpha$  appartient à  $E$ .

**Q 2.** Soit  $P$  une fonction polynomiale non identiquement nulle à coefficients réels. Montrer que la restriction de  $P$  à  $\mathbb{R}_+^*$  appartient à  $E$  si et seulement si  $P(0) = 0$ .

**Q 3.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. Montrer que la fonction  $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto ae^t + b \end{array} \right.$  appartient à  $E$  si et seulement si  $a = b = 0$ .

**Q 4.** Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (e^t - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} \end{array} \right.$  est intégrable sur  $]0, x[$ .

**Q 5.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , on note  $k_x(t) = e^{\min(x,t)} - 1$  où  $\min(x, t)$  désigne le plus petit des réels  $x$  et  $t$ . Représenter graphiquement la fonction  $k_x$ . Montrer que  $k_x$  appartient à  $E$ .

### I.B – Une condition suffisante d'appartenance à $E$

Dans cette sous-partie, on suppose que  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 ; \\ \exists C > 0 ; \forall x > 0, |f'(x)| \leq C \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}. \end{cases}$$

**Q 6.** Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $\Phi(x) = \frac{4\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x} - \int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} dt$ . Montrer que  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , que  $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 0$  et que, pour tout  $x > 0$ ,  $\Phi'(x) \geq 0$ . En déduire que  $\Phi(x) \geq 0$  pour tout  $x > 0$ .

**Q 7.** Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $|f(x)| \leq 4C \frac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$ .

**Q 8.** En déduire que  $f \in E$ .

## II Structure préhilbertienne de E

Q 9. Montrer que, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de E, alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{e^{-t}}{t} dt$  est absolument convergente.

*Indication* : on pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .

Q 10. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  des fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Pour toutes fonctions  $f \in E$  et  $g \in E$ , on pose,  $\langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{e^{-t}}{t} dt$ .

Q 11. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

La norme  $\|\cdot\|$  associée à ce produit scalaire est donc définie pour toute fonction  $f \in E$  par

$$\|f\| = \left( \int_0^{+\infty} f(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2}$$

Q 12. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \|k_x\| = 0$ . On rappelle que, pour tout  $x > 0$ ,  $k_x(t) = e^{\min(x,t)} - 1$ .

Q 13. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$ .

Q 14. On rappelle que les fonctions  $p_\alpha$  ont été définies dans les notations en tête de sujet. La famille  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est-elle une famille orthogonale de E?

## III Un opérateur sur E

À chaque fonction  $f \in E$ , on associe la fonction  $U(f)$  définie pour tout  $x > 0$  par

$$U(f)(x) = \langle k_x | f \rangle = \int_0^{+\infty} (e^{\min(x,t)} - 1) f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

III.A –

Q 15. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toute fonction  $f \in E$ ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} U(f)(x) = 0$$

Q 16. Montrer que pour toute fonction  $f \in E$  et pour tout  $x > 0$ ,

$$U(f)(x) = \int_0^x (1 - e^{-t}) \frac{f(t)}{t} dt + (e^x - 1) \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Q 17. Soit  $f \in E$ . Montrer que  $U(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et vérifie, pour tout  $x > 0$ ,

$$U(f)'(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Q 18. Soit  $f \in E$ . Montrer que  $U(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  et que la fonction  $U(f)$  est solution sur  $\mathbb{R}_+$  de l'équation différentielle

$$y'' - y' = -\frac{f(x)}{x} \quad (\text{III.1})$$

Q 19. Montrer que pour tout  $f \in E$  et pour tout  $x > 0$ ,

$$|U(f)'(x)| \leq e^x \|f\| \left( \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2} \leq \|f\| \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}$$

Q 20. Déduire de ce qui précède que U est un endomorphisme de E et que, pour tout  $f \in E$  et tout  $x > 0$ ,

$$|U(f)(x)| \leq 4\|f\| \frac{\sqrt{x} e^{x/2}}{1+x}$$

Q 21. En déduire que

$$\|U(f)\| \leq 4\|f\|$$

Q 22. Montrer que  $U$  est injectif.

Q 23. L'endomorphisme  $U$  est-il surjectif?

III.B – On fixe deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $E$ . Pour  $x > 0$ , on pose

$$F(x) = -U(f)'(x)e^{-x}$$

Q 24. Vérifier que  $F$  est une primitive de  $x \mapsto f(x)\frac{e^{-x}}{x}$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ .

Q 25. Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $|F(x)U(g)(x)| \leq \frac{4\|f\| \cdot \|g\|}{1+x}$ .

Q 26. Montrer que pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $|F(x)| \leq \|f\|(e^{-1} - \ln(x))^{1/2}$ . **On pourra utiliser la question 19.**

Q 27. Montrer l'existence et calculer les valeurs des limites en 0 et en  $+\infty$  de la fonction  $t \mapsto F(t)U(g)(t)$ .

Q 28. Montrer que  $\langle f | U(g) \rangle = \int_0^{+\infty} U(f)'(t)U(g)'(t)e^{-t} dt$ .

Q 29. En déduire que  $\langle f | U(g) \rangle = \langle U(f) | g \rangle$ .

## IV Solutions d'une équation différentielle développables en série entière

Pour  $p \in \mathbb{R}^*$  on note  $(E_p)$  l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$(E_p) : x(y'' - y') + py = 0$$

Q 30. Soient  $p \in \mathbb{R}^*$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels. On suppose que la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  a un rayon de convergence infini. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est solution de  $(E_p)$  si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ n(n+1)a_{n+1} = (n-p)a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

### IV.A – Recherche de solutions polynomiales

Q 31. Montrer que  $(E_p)$  possède des solutions polynomiales non identiquement nulles si et seulement si  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'alors, les solutions polynomiales non nulles de  $(E_p)$  sont de degré  $p$  et appartiennent à l'espace vectoriel  $E$ . *On ne demande pas de déterminer explicitement les solutions polynomiales lorsqu'elles existent.*

Dans la suite de cette sous-partie, on fixe  $p \in \mathbb{N}^*$  et on considère un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que la fonction polynomiale  $x \mapsto P(x)$  soit solution de l'équation  $(E_p)$ . L'objectif est de déterminer une expression simple de  $P$  en fonction du paramètre  $p$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $h(x) = e^{-x}P(x)$ .

Q 32. Montrer que la fonction  $h$  est solution de l'équation différentielle  $x(y'' + y') + py = 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Q 33. Justifier que la fonction  $h$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des coefficients du développement en série entière de  $h$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ .

On peut montrer, de la même façon qu'à la question 30 (cette démonstration n'est pas demandée), que ces coefficients vérifient

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ n(n+1)b_{n+1} = -(n+p)b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Q 34. Établir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+p-1)!}{p!n!(n-1)!} b_1$ .

**Q 35.** On pose  $g_p(x) = x^{p-1} e^{-x}$ . Justifier que  $g_p^{(p)}$  est développable en série entière et déduire de la question 34 que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P(x) = Cx e^x g_p^{(p)}(x)$$

où  $C$  est une constante réelle dont on précisera l'expression en fonction de  $b_1$  et de  $p$ .

**IV.B – Solutions développables en séries entières non polynomiales**

Dans toute cette sous-partie, on fixe un réel  $p$  non nul et on suppose que  $p \notin \mathbb{N}^*$ .

**Q 36.** Justifier l'existence de suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  non identiquement nulles telles que la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  ait un rayon de convergence infini et telles que la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  soit solution de  $(E_p)$ .

On fixe une telle série entière et on pose pour  $x > 0$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

**Q 37.** Montrer qu'il existe un entier naturel  $q > p$  tel que, pour tout entier  $n \geq q$ ,

$$|a_{n+1}| \geq \frac{|a_n|}{2(n+1)}$$

**Q 38.** En déduire que, pour tout entier  $n \geq q$ ,  $|a_n| \geq \frac{q! |a_q|}{2^{n-q} n!}$ .

**Q 39.** Montrer que la fonction  $\psi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sum_{n=q}^{+\infty} |a_n| x^n \end{cases}$  n'est pas un élément de  $E$ .

**Q 40.** En déduire enfin que la fonction  $f$  n'est pas un élément de  $E$ .

**V Éléments propres de U**

**Q 41.** Le nombre réel 0 est-il valeur propre de  $U$ ?

**Q 42.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . On suppose que  $\lambda$  est valeur propre de  $U$ . Soit  $f$  un vecteur propre associé. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $(E_{1/\lambda})$ .

On suppose que  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}_+^*$ , c'est-à-dire qu'il existe une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  de rayon de convergence infini telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

**Q 43.** Montrer que les seules valeurs propres possibles de  $U$  sont de la forme  $\lambda = 1/p$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ .

**Q 44.** Soit  $P$  une solution polynomiale non nulle de  $(E_p)$ . Démontrer que la fonction  $pU(P) - P$  vérifie sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle  $y'' - y' = 0$ .

**Q 45.** Montrer que  $P$  est un vecteur propre de  $U$  pour la valeur propre  $1/p$ .

**Q 46.** Pour tout entier  $p \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x > 0$ , on pose  $P_p(x) = x e^x g_p^{(p)}(x)$ , où  $g_p(x) = x^{p-1} e^{-x}$ . On rappelle que  $P_p$  est une fonction polynomiale de degré  $p$  et que  $P_p \in E$ . Montrer que les polynômes  $P_p$  sont deux à deux orthogonaux dans  $E$ .

