Les fonctions de Lambert (Centrale PSI 2020 - extrait)

Durée : libre

L'objet de ce problème est l'étude de différentes propriétés des fonctions de Lambert ainsi que leur application en probabilités.
Les fonctions V et W définies dans la partie I sont utilisées dans les parties II et III. Les parties II et III sont indépendantes.

I Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère dans toute cette partie, l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\,\mathrm{e}^{x} \end{array} \right.$$

Q 1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1,+\infty[$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$, $\mathrm{W}(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1,+\infty[$).

Q 2. Justifier que W est continue sur $[-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$ et est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $]-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$.

Q 3. Expliciter $\mathrm{W}(0)$ et $\mathrm{W}'(0)$.

Q 4. Déterminer un équivalent de $\mathrm{W}(x)$ lorsque $x \to 0$, ainsi qu'un équivalent de $\mathrm{W}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Q 5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{\mathrm{W}}$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_{\mathrm{W}}$ au point d'abscisse $-\mathrm{e}^{-1}$.

Q 6. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^{\alpha}\mathrm{W}(x)$ est-elle intégrable sur $]0,1]$?

Q 7. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^{\alpha}\mathrm{W}(x)$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

Q 8. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty,-1]$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1},0[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.

Q 9. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x\,\mathrm{e}^{x} = m \tag{I.1}$$

Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (I.1). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

Q 10. Pour un paramètre réel m, on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x\,\mathrm{e}^{x} \leqslant m \tag{I.2}$$

En utilisant les fonctions V et W, déterminer suivant les valeurs de m le de solutions de (I.2).

Q 11. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (I.3). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

II Probabilités

On étudie dans cette partie deux situations dont la résolution fait intervenir les fonctions V et W définies dans la partie précédente. Les variables aléatoires considérées dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont notées, sous réserve d'existence, respectivement $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

II. A – Première situation

Pour fidéliser sa clientèle, un commerçant organise une tombola permettant de gagner différents lots. Chaque client qui entre dans le magasin tire un billet de tombola. Chaque billet permet de gagner un lot avec la probabilité $p \in]0,1[$. On suppose que les tirages sont indépendants et on admet que le nombre N de billets distribués aux clients au cours d'une journée est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X le nombre de billets gagnants tirés au cours d'une journée et on admet que X est également une variable aléatoire. Pour que l'opération soit rentable, le commerçant souhaite que la probabilité de gagner au moins deux lots durant la même journée soit faible. On considère donc un réel $\alpha \in]0,1[$ et on souhaite réaliser la condition

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha \tag{II.1}$$

Cependant, pour que l'opération intéresse les clients, le commerçant souhaite également que p soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.1).

Q 12. Démontrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp. Donner l'espérance et la variance de X.

Q 13. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $p \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{\lambda}$ alors la condition (II.2) est satisfaite.

Q 14. On pose $x = -(\lambda p + 1)$. Démontrer que la condition (II.1) est équivalente à la condition

$$x\,e^{x} \leqslant -\alpha\,e^{-1}$$

Q 15. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie I et la question 10, discuter selon la position de λ par rapport à $-1-V(-\alpha\,e^{-1})$ l'existence d'un plus grand réel $p \in]0,1[$ satisfaisant la condition (II.1).

II. B – Deuxième situation

Un message constitué d'une suite de bits est transmis sur un canal. Cependant, ce canal n'est pas fiable : chaque bit risque d'être inversé, indépendamment des autres, avec la probabilité $1-p \in]0,1[$. Pour fiabiliser la transmission, on découpe le message et on transmet des blocs de r bits. Chaque bloc comprend à la fois des bits du message d'origine et des bits supplémentaires qui permettent de détecter et corriger une erreur. On note X le nombre d'inversions survenues lors de la transmission d'un bloc de r bits et on admet que X est une variable aléatoire. Pour que la transmission soit suffisamment fiable, on souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs dans un même paquet soit faible. Plus précisément, on considère $\alpha \in]0,1[$ et on veut réaliser la condition

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha \tag{II.2}$$

Pour que le codage soit efficace, on souhaite de plus que r soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.2).

Q 16. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Q 17. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $r \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{1-p}$, alors la condition (II.2) est satisfaite.

Q 18. On pose $a = \dfrac{p\ln(p)}{p-1}$. Démontrer que la condition (II.2) est équivalente à la condition

$$x\,e^{x} \leqslant -\alpha a\,e^{-a}$$

Q 19. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie I) et la question 10, étudier l'existence d'un plus grand réel r satisfaisant la condition (II.2).

Q 20. Lorsqu'il existe, exprimer cet entier en fonction de p, α et a à l'aide d'une des fonctions V ou W.

III Développement en série entière

Le but de cette partie est d'établir que la fonction W définie dans la partie I est développable en série entière et de préciser son développement ainsi que son rayon de convergence. Pour cela, on commence par établir un résultat de nature algébrique.

III. A – Le théorème binomial d'Abel

On considère dans cette partie un entier naturel n ainsi qu'un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ en posant

$$A_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad A_k = \frac{1}{k!}X(X-ka)^{k-1}$$

On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

Q 21. Démontrer que la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q 22. Démontrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad A_k'(X) = A_{k-1}(X - a)$.

Q 23. En déduire, pour j et k éléments de $[\![0, n]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j < k$, $j = k$ ou $j > k$.

Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des nombres complexes tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$$

Q 24. Démontrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

Q 25. En déduire l'identité binomiale d'Abel :

$$\forall (a, x, y) \in \mathbb{C}^3, \quad (x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x - ka)^{k-1}(y + ka)^{n-k}$$

Q 26. Établir la relation,

$$\forall (a, y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y + ka)^{n-k}$$

III. B – Développement en série entière de la fonction W

On définit une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ en posant,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}$$

On définit, lorsque c'est possible, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Q 27. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$.

Q 28. Justifier que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer $S^{(n)}(0)$ en fonction de n.

Q 29. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $[-R, R]$.

Q 30. Démontrer que,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad x(1 + S(x))S'(x) = S(x)$$

On pourra utiliser le résultat de la question 26.

On considère la fonction $\quad h : \left| \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & S(x)e^{S(x)} \end{array} \right.$

Q 31. Démontrer que h est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

Q 32. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur chacun des intervalles $]0, R[$, $]-R, 0[$, puis sur l'intervalle $]-R, R[$.

Q 33. En déduire que,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = W(x)$$

Q 34. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-R, R]$?