Les fonctions de Lambert (Centrale PSI 2020 - extrait)

Durée : libre

I Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère dans toute cette partie, l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^x \end{array} \right.$$

Q 1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1,+\infty[$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$, $\mathrm{W}(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1,+\infty[$).

Q 2. Justifier que W est continue sur $[-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$ et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$.

Q 3. Expliciter $\mathrm{W}(0)$ et $\mathrm{W}'(0)$.

Q 4. Déterminer un équivalent de $\mathrm{W}(x)$ lorsque $x \to 0$, ainsi qu'un équivalent de $\mathrm{W}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Q 5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_\mathrm{W}$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_\mathrm{W}$ au point d'abscisse $-\mathrm{e}^{-1}$.

Q 6. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty,-1]$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1},0[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.

Q 7. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x\mathrm{e}^x = m \tag{I.1}$$

Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (I.1). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

Q 8. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (I.3). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

II Développement en série entière

Le but de cette partie est d'établir que la fonction W définie dans la partie I est développable en série entière et de préciser son développement ainsi que son rayon de convergence. Pour cela, on commence par établir un résultat de nature algébrique.

II. A – Le théorème binomial d'Abel

On considère dans cette partie un entier naturel n ainsi qu'un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n)$ en posant

$$\mathrm{A}_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{A}_k = \frac{1}{k!}\mathrm{X}(\mathrm{X}-ka)^{k-1}$$

On note $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

Q 9. Démontrer que la famille $(\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

Q 10. Démontrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{A}_k'(\mathrm{X}) = \mathrm{A}_{k-1}(\mathrm{X}-a)$.

Q 11. En déduire, pour j et k éléments de $[\![0,n]\!]$, la valeur de $\mathrm{A}_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j<k$, $j=k$ ou $j>k$.

Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ et soient $\alpha_0,\dots,\alpha_n$ des nombres complexes tels que

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{A}_k$$

Q 12. Démontrer que, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_j = \mathrm{P}^{(j)}(ja)$.

Q 13. En déduire l'identité binomiale d'Abel :

$$\forall (a,x,y) \in \mathbb{C}^3, \quad (x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

Q 14. Établir la relation,

$$\forall (a,y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

II. B – Développement en série entière de la fonction W

On définit une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ en posant,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}$$

On définit, lorsque c'est possible, $\mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Q 15. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

Q 16. Justifier que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathrm{S}^{(n)}(0)$ en fonction de n.

Q 17. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$.

Q 18. Démontrer que,

$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \quad x\big(1+\mathrm{S}(x)\big)\mathrm{S}'(x) = \mathrm{S}(x)$$

On pourra utiliser le résultat de la question 14.

On considère la fonction $h : \left| \begin{array}{rcl}]-\mathrm{R},\mathrm{R}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} \end{array} \right.$

Q 19. Démontrer que h est solution sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

Q 20. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur chacun des intervalles $]0,\mathrm{R}[$, $]-\mathrm{R},0[$, puis sur l'intervalle $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$.

Q 21. En déduire que,

$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \quad \mathrm{S}(x) = \mathrm{W}(x)$$

Q 22. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$?

III Approximation de W

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et on étudie sa convergence vers la fonction W définie dans la partie **I**.
Pour tout réel positif x, on considère la fonction ϕ_x définie par

$$\phi_x : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & x\exp\big(-x\exp(-t)\big) \end{array} \right.$$

et on définit, sur $\mathbb{R}_+$, une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_{n+1}(x) = \phi_x\big(w_n(x)\big) \end{cases}$$

Q 23. Démontrer que, pour tout réel positif x, $\mathrm{W}(x)$ est un point fixe de ϕ_x, c'est-à-dire une solution de l'équation $\phi_x(t) = t$.

Q 24. Démontrer que, pour tout réel positif x, la fonction ϕ_x est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}$$

Q 25. En déduire que

$$\forall x \in [0,\mathrm{e}], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big|w_n(x) - \mathrm{W}(x)\big| \leqslant \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n \big|1 - \mathrm{W}(x)\big|$$

Q 26. Pour tout réel $a \in]0,\mathrm{e}[$, justifier que la suite de fonctions (w_n) converge uniformément sur $[0,a]$ vers la fonction W.

Q 27. La suite de fonctions (w_n) converge-t-elle uniformément vers W sur $[0,\mathrm{e}]$?