Corrigé : les fonctions de Lambert (Centrale PSI 2020 - extrait)

I Fonctions de Lambert

Q 1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$, d'où les variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/\mathrm{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

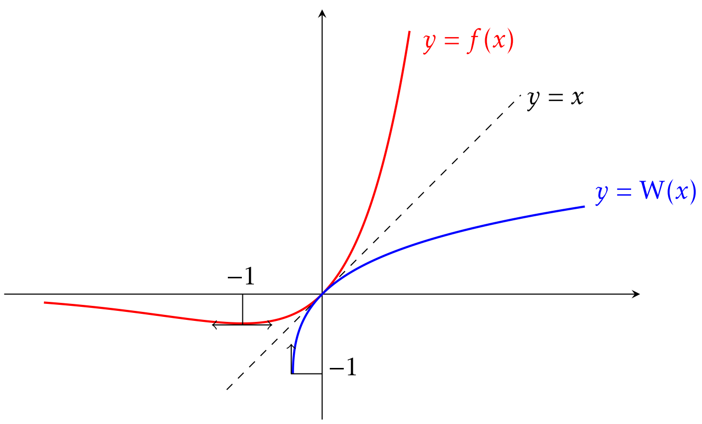
D'après le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection entre $[-1,+\infty[$ et $[-1/\mathrm{e},+\infty[$.

Q 2. Ce même théorème prouve que W est continue sur $[-1/\mathrm{e},+\infty[$. De plus, sachant que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et que sa dérivée ne s'y annule pas, on peut affirmer que W est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'image par f de cet intervalle, soit $]-1/\mathrm{e},+\infty[$.

Q 3. $f(0)=0$ donc $\mathrm{W}(0)=0$, et pour tout $x>-1$, $\mathrm{W}'(x) = \dfrac{1}{f'(\mathrm{W}(x))}$ donc $\mathrm{W}'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$.

Q 4. D'après la formule de Taylor-Young, $\mathrm{W}(x) \underset{0}{=} \mathrm{W}(0) + x\mathrm{W}'(0) + \mathrm{o}(x) \underset{0}{=} x + \mathrm{o}(x)$ donc $\mathrm{W}(x) \underset{0}{\sim} x$.
Pour tout $x>0$, $\mathrm{W}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{W}(x)} = x > 0$ donc $\ln(\mathrm{W}(x)) + \mathrm{W}(x) = \ln x$. De plus, $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{W}(x) = +\infty$ (d'après les variations de f) donc $\ln(\mathrm{W}(x)) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\big(\mathrm{W}(x)\big)$. On en déduit que $\mathrm{W}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

Q 5. On obtient le graphe suivant :



Q 6. Au voisinage de 0, $x^\alpha \mathrm{W}(x) \underset{0}{\sim} x^{\alpha+1}$ donc $x \mapsto x^\alpha \mathrm{W}(x)$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha+1>-1$, soit $\alpha>-2$.

Q 7. Au voisinage de $+\infty$, $x^\alpha \mathrm{W}(x) \underset{+\infty}{\sim} x^\alpha \ln x$.
Si $\alpha < -1$ on a $x^\alpha \mathrm{W}(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(x^\beta)$ avec $\alpha < \beta < 1$ et puisque $x \mapsto x^\beta$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en est de même de $x \mapsto x^\alpha \mathrm{W}(x)$.
Si $\alpha \geqslant -1$ on a $x^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(x^\alpha \mathrm{W}(x))$ et puisque $x \mapsto x^\alpha$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$, il en est de même de $x \mapsto x^\alpha \mathrm{W}(x)$.
On en déduit que $x \mapsto x^\alpha \mathrm{W}(x)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$.

Q 8. Compte tenu des variations étudiées à la question 1, le théorème de la bijection monotone prouve que f réalise une bijection continue entre $]-\infty,-1]$ et $[-1/\mathrm{e},0[$.

Q 9. Compte tenu des variations de f étudiées à la question 1,

- si $m < -1/\mathrm{e}$ l'équation $x\mathrm{e}^x = m$ n'a pas de solution ;
- si $m = -1/\mathrm{e}$ l'équation $x\mathrm{e}^x = m$ possède une unique solution $x=-1$;
- si $-1/\mathrm{e} < m < 0$ l'équation $x\mathrm{e}^x = m$ possède deux solutions distinctes $\mathrm{V}(m)$ et $\mathrm{W}(m)$;
- si $m \geqslant 0$ l'équation $x\mathrm{e}^x = m$ possède une unique solution $\mathrm{W}(m)$.

Q 10. Compte tenu des variations de f étudiées à la question 1,

- si $m < -1/\mathrm{e}$ l'inéquation $x\,\mathrm{e}^x \leqslant m$ n'a pas de solution ;
- si $m = -1/\mathrm{e}$ l'inéquation $x\,\mathrm{e}^x \leqslant m$ possède une unique solution $x = -1$;
- si $-1/\mathrm{e} < m < 0$ l'inéquation $x\,\mathrm{e}^x \leqslant m$ est vérifiée pour tout $x \in [\mathrm{V}(m), \mathrm{W}(m)]$;
- si $m \geqslant 0$ l'équation $x\,\mathrm{e}^x = m$ est vérifiée pour tout $x \in]-\infty, \mathrm{W}(m)]$.

Q 11. $\mathrm{e}^{ax} + bx = 0 \iff bx\,\mathrm{e}^{-ax} = -1 \iff -ax\,\mathrm{e}^{-ax} = \dfrac{a}{b} \iff f(-ax) = \dfrac{a}{b}$. Les variations de f permettent d'en déduire :

- si $a/b < -1/\mathrm{e}$, l'équation n'a pas de solution ;
- si $a/b = -1/\mathrm{e}$, l'équation possède une unique solution $x = 1/a$;
- si $-1/e < a/b < 0$, l'équation possède deux solutions $-\dfrac{\mathrm{V}(a/b)}{a}$ et $-\dfrac{\mathrm{W}(a/b)}{a}$;
- si $0 \leqslant a/b$, l'équation possède une unique solution $-\dfrac{\mathrm{W}(a/b)}{a}$.

II Probabilités

II. A – Première situation

Q 12. X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'après la formule des probabilités totales,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k \mid \mathrm{N} = n)\mathbb{P}(\mathrm{N} = n).$$

La variable $(\mathrm{X} \mid \mathrm{N} = n)$ suit une loi binomiale de paramètre (n, p) donc $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k \mid \mathrm{N} = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Ainsi,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-k}\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{(1-p)\lambda} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda p}$$

ce qui montre que X suit une loi de Poisson de paramètre λp.
On en déduit d'après le cours que $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathbb{V}(\mathrm{X}) = \lambda p$.

Q 13. D'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{X})}{2} = \dfrac{\lambda p}{2}$. Pour que la condition (II.1) soit vérifiée, il suffit donc de faire en sorte que $\dfrac{\lambda p}{2} \leqslant 1 - \alpha$, soit $p \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{\lambda}$.

Q 14. On a $\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda p}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) = \lambda p\,\mathrm{e}^{-\lambda p}$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda p} - \lambda p\,\mathrm{e}^{-\lambda p} = 1 + x\,\mathrm{e}^{x+1}$ en posant $x = -(1 + \lambda p)$. La condition (II.1) s'écrit donc $1 + x\,\mathrm{e}^{x+1} \leqslant 1 - \alpha$, soit $x\,\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha\,\mathrm{e}^{-1}$.

Q 15. Nous avons $\alpha \in]0, 1[$ donc $-1/\mathrm{e} < -\alpha\,\mathrm{e}^{-1} < 0$. d'après la question 10, l'inéquation $x\,\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha\,\mathrm{e}^{-1}$ est vérifiée pour tout $x \in [\mathrm{V}(-\alpha\,\mathrm{e}^{-1}), \mathrm{W}(-\alpha\,\mathrm{e}^{-1})]$. En remplaçant x par sa valeur on obtient l'encadrement

$$-1 - \mathrm{W}(-\alpha\,\mathrm{e}^{-1}) \leqslant \lambda p \leqslant -1 - \mathrm{V}(-\alpha\,\mathrm{e}^{-1})$$

qui est une condition nécessaire et suffisante pour que la condition (II.1) soit vérifiée.
Il s'agit maintenant de trouver la valeur maximale de p vérifiant cet encadrement, sachant que $p \in]0, 1[$.
Remarquons déjà que $-1 - \mathrm{W}(-\alpha\,\mathrm{e}^{-1}) < 0$ et $-1 - \mathrm{V}(-\alpha\,\mathrm{e}^{-1}) > 0$ puisque $-\alpha\,\mathrm{e}^{-1} > 1/\mathrm{e}$. Ainsi,

- Si $\lambda > -1 - \mathrm{V}(-\alpha\,\mathrm{e}^{-1})$, cette valeur maximale existe et vaut $p = \dfrac{-1 - \mathrm{V}(-\alpha\,\mathrm{e}^{-1})}{\lambda}$;
- si $\lambda \leqslant -1 - \mathrm{V}(-\alpha\,\mathrm{e}^{-1})$, cette valeur maximale n'existe pas car toute valeur $p \in]0, 1[$ vérifie la condition (II.1).

II. B – Deuxième situation

Q 16. X est à valeurs dans $[\![0, r]\!]$ et suit une loi binomiale de paramètre $(r, 1-p)$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{r}{k} p^{r-k}(1-p)^k$. D'après le cours, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = r(1-p)$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = rp(1-p)$.

Q 17. D'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{X})}{2} = \dfrac{r(1-p)}{2}$. Pour que la condition (II.2) soit vérifiée, il suffit donc de faire en sorte que $\dfrac{r(1-p)}{2} \leqslant 1 - \alpha$, soit $r \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{1-p}$.

Q 18. $\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) = 1 - p^r - rp^{r-1}(1-p) = 1 - p^r\left(1 - r\dfrac{p-1}{p}\right)$ donc la condition (II.2) est vérifiée si et seulement si $p^r\left(1 - r\dfrac{p-1}{p}\right) \geqslant \alpha$.

En posant $a = \dfrac{p\ln p}{p-1}$ cette condition s'écrit $p^r\left(1 - r\dfrac{\ln p}{a}\right) \geqslant \alpha$, soit $p^r(a - r\ln p) \geqslant \alpha a$ car $a > 0$.

En posant $x = r\ln p - a$ on obtient la condition $xp^r \leqslant -\alpha a$, soit $x\mathrm{e}^{x+a} \leqslant -\alpha a$ et enfin $x\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha a\mathrm{e}^{-a}$ puisque $p^r = \mathrm{e}^{x+a}$.

Q 19. On a $a > 0$ donc $-a\mathrm{e}^{-a} = f(-a) \in [-1/\mathrm{e}, 0[$ (d'après les variations de f) et ainsi $-1/\mathrm{e} < -\alpha a\mathrm{e}^{-a} < 0$. d'après la question 10, l'inéquation $x\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha a\mathrm{e}^{-a}$ est vérifiée dès lors que

$$\mathrm{V}(-\alpha a\mathrm{e}^{-a}) \leqslant x \leqslant \mathrm{W}(-\alpha a\mathrm{e}^{-a}) \iff \frac{a + \mathrm{W}(-\alpha a\mathrm{e}^{-a})}{\ln p} \leqslant r \leqslant \frac{a + \mathrm{V}(-\alpha a\mathrm{e}^{-a})}{\ln p}$$

L'ensemble des entiers r vérifiant cette inégalité est majoré ; pour montrer qu'il existe un entier r maximal il suffit donc de montrer qu'il existe au moins un entier naturel non nul vérifiant cet encadrement. Or on peut observer que pour $r = 1$, $\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - p - (1-p) = 0$ donc la condition (II.2) est toujours vérifiée pour $r = 1$, ce qui prouve que $r = 1$ vérifie cet encadrement.

Q 20. On a donc $r_{\max} = \left\lfloor \dfrac{a + \mathrm{V}(-\alpha a\mathrm{e}^{-a})}{\ln p} \right\rfloor$.

III Développement en série entière

III. A – Le théorème binomial d'Abel

Q 21. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg \mathrm{A}_k = k$. La famille (A_k) est échelonnée en degré donc constitue une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q 22. On calcule pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathrm{A}_k' = \frac{1}{k!}(X - ka)^{k-1} + \frac{k-1}{k!}X(X-ka)^{k-2} = \frac{1}{k!}(X - ka + (k-1)X)(X-ka)^{k-2} = \frac{1}{(k-1)!}(X-a)(X-ka)^{k-2} = \mathrm{A}_{k-1}(X-a)$$

Q 23. Si $j > k$ on a $\mathrm{A}_k^{(j)} = 0$ car $\deg \mathrm{A}_k = k$ donc $\mathrm{A}_k^{(j)}(ja) = 0$.
Si $j \leqslant k$ on a d'après la question précédente, $\mathrm{A}_k^{(j)} = \mathrm{A}_{k-j}(X - ja)$ donc $\mathrm{A}_k^{(j)}(ja) = \mathrm{A}_{k-j}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j < k \end{cases}$.

Q 24. La question précédente peut se résumer à : $\mathrm{A}_k^{(j)}(ja) = \delta jk$ (symbole de Kronecker) donc $\mathrm{P}^{(j)}(ja) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \delta_{jk} = \alpha_j$.

Q 25. Ainsi, pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[X]$, $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}^{(k)}(ka)\mathrm{A}_k$. Fixons $y \in \mathbb{C}$ et appliquons ce résultat au polynôme $\mathrm{P} = (X+y)^n$. On a $\mathrm{P}^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}(X+y)^{n-k}$ donc on obtient : $(X+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(y+ka)^{n-k}\mathrm{A}_k$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

Q 26. Fixons $y \in \mathbb{C}$ et dérivons cette égalité vis-à-vis de x (pour un entier $n \geqslant 1$). On obtient :

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \Big((x-ka)^{k-1} + (k-1)x(x-ka)^{k-2}\Big)(y+ka)^{n-k}$$

Appliquée en $x = 0$ on obtient : $ny^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$.

III. B – Développement en série entière de la fonction W

Q 27. Pour tout $x \neq 0$, $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}|x| = \mathrm{e}^{(n-1)\ln(1+1/n)}|x|$ donc $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \mathrm{e}|x|$.

D'après le critère de d'Alembert, $\sum a_n x^n$ converge absolument si $|x| < 1/\mathrm{e}$ et diverge grossièrement si $|x| > 1/\mathrm{e}$ donc le rayon de convergence est égal à $1/\mathrm{e}$.

Q 28. D'après le cours S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}^{(n)}(0) = a_n n! = (-n)^{n-1}$.

Q 29. Notons $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Sur l'intervalle $[-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}]$, $\|f_n\|_\infty = |a_n|\mathrm{e}^{-n} = \dfrac{n^{n-1}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!}$.
D'après la formule de Stirling, $\|f_n\|_\infty \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$. La série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge donc la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $[-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}]$. Chacune des fonctions f_n étant continue, la somme S est définie et continue sur $[-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}]$.

Q 30. Pour tout $x \in]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$, $x\mathrm{S}'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$. Réalisons un produit de Cauchy avec $1+\mathrm{S}(x)$ (en posant par commodité $a_0 = 1$) :

$$x\big(1+\mathrm{S}(x)\big)\mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \text{avec} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (n-k) a_{n-k}$$

On a $b_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-k)^{k-1}}{k!}(n-k)\frac{(k-n)^{n-k-1}}{(n-k)!} = n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} - \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-k)^{k-1}(k-n)^{n-k} \\ &= n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} + \frac{(-n)^{n-1}}{n!} - \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-k)^{k-1}(k-n)^{n-k} \end{aligned}$$

Appliquons maintenant la question 26 avec $a = 1$ et $y = -n$. On obtient : $n(-n)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-k)^{k-1}(k-n)^{n-k}$, ce qui nous donne $b_n = n\dfrac{(-n)^{n-1}}{n!} + \dfrac{(-n)^{n-1}}{n!} - n\dfrac{(-n)^{n-1}}{n!} = \dfrac{(-n)^{n-1}}{n!} = a_n$ et permet d'en conclure que $x\big(1+\mathrm{S}(x)\big)\mathrm{S}'(x) = \mathrm{S}(x)$.

Q 31. Pour tout $x \in]-)1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$, $xh'(x) = x\mathrm{S}'(x)\big(1+\mathrm{S}(x)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = \mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = h(x)$ donc h est solution de $xy' - y = 0$.

Q 32. Sur chacun des deux intervalles $]-1/\mathrm{e}, 0[$ et $]0, 1/\mathrm{e}[$ la fonction $x \mapsto x$ est solution particulière de $xy' - y = 0$ donc les solutions sur chacun de ces deux intervalles sont de la forme $x \mapsto ax$.
Une solution sur $]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$ se doit d'être de classe $\mathscr{C}^1$, donc les solutions sur cet intervalle sont elles aussi de la forme $x \mapsto ax$.

Q 33. Il existe donc un réel a tel que pour tout x$\in]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$, $\mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = ax$. En dérivant on obtient $\big(\mathrm{S}'(x)+\mathrm{S}(x)\mathrm{S}'(x)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = a$, et sachant que $\mathrm{S}(0) = 0$: $a = \mathrm{S}'(0) = a_1 = 1$.
On a prouvé que pour tout $x \in]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$, $\mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = x$, soit $f\big(\mathrm{S}(x)\big) = x$ avec les notations de la première partie.
Lorsque $x \in [0, 1/\mathrm{e}[$ on a nécessairement $\mathrm{S}(x) = \mathrm{W}(x)$.
Lorsque $x \in]-1/\mathrm{e}, 0[$, on peut avoir $\mathrm{S}(x) = \mathrm{W}(x)$ ou $\mathrm{S}(x) = \mathrm{V}(x)$. Pour exclure cette seconde possibilité, il suffit de montrer que $\mathrm{S}(x) \geqslant -1$. Or pour $x < 0$,

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}(-|x|)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}|x|^n \geqslant -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}(1/\mathrm{e})^n = \mathrm{S}(-1/\mathrm{e})$$

S étant continue sur $[-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}]$ on peut faire tendre x vers $-1/\mathrm{e}$ dans l'égalité $\mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = x$ pour obtenir $f\big(\mathrm{S}(-1/\mathrm{e})\big) = -1/\mathrm{e}$, ce qui montre que $\mathrm{S}(-1/\mathrm{e}) = -1$. On peut donc conclure : pour tout $x \in]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$, $\mathrm{S}(x) = \mathrm{W}(x)$.

Q 34. Les fonctions W et S sont continues sur $[-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}]$ donc leur égalité se prolonge sur le segment.