Corrigé : les fonctions de Lambert (Centrale PSI 2020 - extrait)

I Fonctions de Lambert

Q 1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f'(x) = (x+1)e^x$, d'où les variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-1/e$	$\nearrow +\infty$

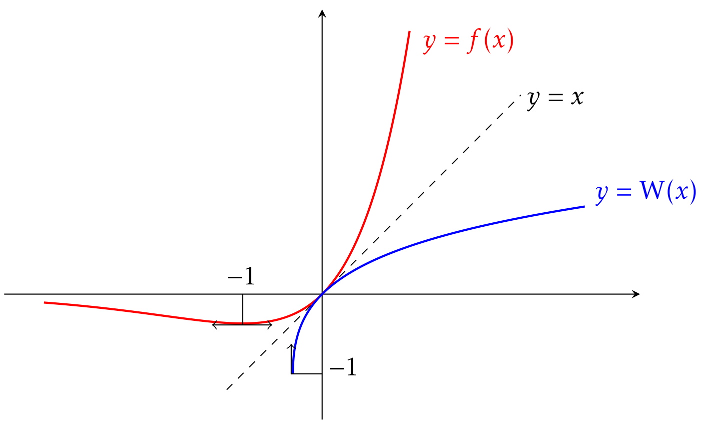
D'après le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection entre $[-1,+\infty[$ et $[-1/e,+\infty[$.

Q 2. Ce même théorème prouve que W est continue sur $[-1/e,+\infty[$. De plus, sachant que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et que sa dérivée ne s'y annule pas, on peut affirmer que W est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'image par f de cet intervalle, à savoir $]-1/e,+\infty[$.

Q 3. $f(0) = 0$ donc $W(0) = 0$, et pour tout $x > -1$, $W'(x) = \dfrac{1}{f'(W(x))}$ donc $W'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$.

Q 4. D'après la formule de Taylor-Young, $W(x) \underset{0}{=} W(0) + xW'(0) + o(x) \underset{0}{=} x + o(x)$ donc $W(x) \underset{0}{\sim} x$.
Pour tout $x > 0$, $W(x)e^{W(x)} = x > 0$ donc $W(x) + \ln(W(x)) = \ln x$. De plus, $\lim\limits_{+\infty} W(x) = +\infty$ (d'après les variations de f) donc $\ln(W(x)) \underset{+\infty}{=} o\big(W(x)\big)$. Ainsi, $\ln x \underset{+\infty}{=} W(x) + o\big(W(x)\big)$, soit encore $W(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

Q 5. On obtient le graphe suivant :



Q 6. Compte tenu des variations étudiées à la question 1, le théorème de la bijection monotone prouve que f réalise une bijection continue entre $]-\infty,-1]$ et $[-1/e,0[$; on note V l'application réciproque.

Q 7. Compte tenu des variations de f étudiées à la question 1,

- si $m < -1/e$ l'équation $xe^x = m$ n'a pas de solution ;
- si $m = -1/e$ l'équation $xe^x = m$ possède une unique solution $x = -1$;
- si $-1/e < m < 0$ l'équation $xe^x = m$ possède deux solutions distinctes $V(m)$ et $W(m)$;
- si $0 \leqslant m$ l'équation $xe^x = m$ possède une unique solution $W(m)$.

Q 8. $e^{ax} + bx = 0 \iff bxe^{-ax} = -1 \iff -axe^{-ax} = \dfrac{a}{b} \iff f(-ax) = \dfrac{a}{b}$. D'après la question 7 on a donc :

- si $a/b < -1/e$, l'équation n'a pas de solution ;
- si $a/b = -1/e$, l'équation possède une unique solution $x = 1/a$;
- si $-1/e < a/b < 0$, l'équation possède deux solutions $-\dfrac{V(a/b)}{a}$ et $-\dfrac{W(a/b)}{a}$;
- si $0 \leqslant a/b$, l'équation possède une unique solution $-\dfrac{W(a/b)}{a}$.

II Développement en série entière

II. A – Le théorème binomial d'Abel

Q 9. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg \mathrm{A}_k = k$. La famille (A_k) est échelonnée en degré et de cardinal $n+1$ donc constitue une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

Q 10. On calcule pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\mathrm{A}_k' = \frac{1}{k!}(\mathrm{X}-ka)^{k-1} + \frac{k-1}{k!}\mathrm{X}(\mathrm{X}-ka)^{k-2} = \frac{1}{k!}(\mathrm{X}-ka+(k-1)\mathrm{X})(\mathrm{X}-ka)^{k-2} = \frac{1}{(k-1)!}(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-ka)^{k-2} = \mathrm{A}_{k-1}(\mathrm{X}-a)$$

Q 11. Si $j > k$ on a $\mathrm{A}_k^{(j)} = 0$ car $\deg \mathrm{A}_k = k$ donc $\mathrm{A}_k^{(j)}(ja) = 0$.
Si $j \leqslant k$ on a d'après la question précédente, $\mathrm{A}_k^{(j)} = \mathrm{A}_{k-j}(\mathrm{X}-ja)$ donc $\mathrm{A}_k^{(j)}(ja) = \mathrm{A}_{k-j}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j < k \end{cases}$.

Q 12. La question précédente peut se résumer à : $\mathrm{A}_k^{(j)}(ja) = \delta_{jk}$ (symbole de Kronecker) donc $\mathrm{P}^{(j)}(ja) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \delta_{jk} = \alpha_j$.

Q 13. Ainsi, pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}^{(k)}(ka)\mathrm{A}_k$. Fixons $y \in \mathbb{C}$ et appliquons ce résultat au polynôme $\mathrm{P} = (\mathrm{X}+y)^n$. On a $\mathrm{P}^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}(\mathrm{X}+y)^{n-k}$ donc on obtient : $(\mathrm{X}+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(y+ka)^{n-k}\mathrm{A}_k$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

Q 14. Fixons $y \in \mathbb{C}$ et dérivons cette égalité vis-à-vis de x (pour un entier $n \geqslant 1$). On obtient :

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \Big((x-ka)^{k-1} + (k-1)x(x-ka)^{k-2} \Big)(y+ka)^{n-k}$$

Appliquée en $x = 0$ on obtient : $ny^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$.

II. B – Développement en série entière de la fonction W

Q 15. Pour tout $x \neq 0$, $\left| \dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1} |x| = \mathrm{e}^{(n-1)\ln(1+1/n)}|x|$ donc $\lim \left| \dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \mathrm{e}|x|$.
D'après le critère de d'Alembert, $\sum a_n x^n$ converge absolument si $|x| < 1/\mathrm{e}$ et diverge grossièrement si $|x| > 1/\mathrm{e}$ donc le rayon de convergence est égal à $1/\mathrm{e}$.

Q 16. D'après le cours S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}^{(n)}(0) = a_n n! = (-n)^{n-1}$.

Q 17. Notons $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Sur l'intervalle $[-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}]$, $\|f_n\|_\infty = |a_n|\mathrm{e}^{-n} = \dfrac{n^{n-1}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!}$.
D'après la formule de Stirling, $\|f_n\|_\infty \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$. La série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge donc la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $[-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}]$. Chacune des fonctions f_n étant continue, la somme S est définie et continue sur $[-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}]$.

Q 18. Pour tout $x \in]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$, $x\mathrm{S}'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$. Réalisons un produit de Cauchy avec $1 + \mathrm{S}(x)$ (en posant par commodité $a_0 = 1$) :

$$x\big(1+\mathrm{S}(x)\big)\mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \text{avec} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (n-k) a_{n-k}$$

On a $b_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-k)^{k-1}}{k!}(n-k)\frac{(k-n)^{n-k-1}}{(n-k)!} = n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} - \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-k)^{k-1}(k-n)^{n-k} \\ &= n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} + \frac{(-n)^{n-1}}{n!} - \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-k)^{k-1}(k-n)^{n-k} \end{aligned}$$

Appliquons maintenant la question 14 avec $a = 1$ et $y = -n$. On obtient : $n(-n)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-k)^{k-1}(k-n)^{n-k}$, ce qui nous donne $b_n = n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} + \frac{(-n)^{n-1}}{n!} - n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} = \frac{(-n)^{n-1}}{n!} = a_n$ et permet d'en conclure que $x\big(1+\mathrm{S}(x)\big)\mathrm{S}'(x) = \mathrm{S}(x)$.

Q 19. Pour tout $x \in]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$, $xh'(x) = x\mathrm{S}'(x)\big(1+\mathrm{S}(x)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = \mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = h(x)$ donc h est solution de $xy' - y = 0$.

Q 20. Sur chacun des deux intervalles $]-1/\mathrm{e}, 0[$ et $]0, 1/\mathrm{e}[$ la fonction $x \mapsto x$ est solution particulière de $xy' - y = 0$ donc les solutions sur chacun de ces deux intervalles sont de la forme $x \mapsto ax$.
Une solution sur $]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$ se doit d'être de classe $\mathscr{C}^1$, donc les solutions sur cet intervalle sont elles aussi de la forme $x \mapsto ax$.

Q 21. Il existe donc un réel a tel que pour tout x$\in$ $]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$, $\mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = ax$. En dérivant on obtient $\big(\mathrm{S}'(x)+\mathrm{S}(x)\mathrm{S}'(x)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = a$, et sachant que $\mathrm{S}(0) = 0$: $a = \mathrm{S}'(0) = a_1 = 1$.
On a prouvé que pour tout $x \in]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$, $\mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = x$, soit $f\big(\mathrm{S}(x)\big) = x$ avec les notations de la première partie.
Lorsque $x \in [0, 1/\mathrm{e}[$ on a nécessairement $\mathrm{S}(x) = \mathrm{W}(x)$.
Lorsque $x \in]-1/\mathrm{e}, 0[$, on peut avoir $\mathrm{S}(x) = \mathrm{W}(x)$ ou $\mathrm{S}(x) = \mathrm{V}(x)$. Pour exclure cette seconde possibilité, il suffit de montrer que $\mathrm{S}(x) \geqslant -1$. Or pour $x < 0$,

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}(-|x|)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}|x|^n \geqslant -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}(1/\mathrm{e})^n = \mathrm{S}(-1/\mathrm{e})$$

S étant continue sur $[-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}]$ on peut faire tendre x vers $-1/\mathrm{e}$ dans l'égalité $\mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{S}(x)} = x$ pour obtenir $f\big(\mathrm{S}(-1/\mathrm{e})\big) = -1/\mathrm{e}$, ce qui montre que $\mathrm{S}(-1/\mathrm{e}) = -1$. On peut donc conclure : pour tout $x \in]-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}[$, $\mathrm{S}(x) = \mathrm{W}(x)$.

Q 22. Les fonctions W et S sont continues sur $[-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}]$ donc leur égalité se prolonge sur le segment.

III Approximation de W

Q 23. Pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{W}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{W}(x)} = x$ donc $x\exp(-\mathrm{W}(x)) = \mathrm{W}(x)$. Ainsi, $\phi_x(\mathrm{W}(x)) = x\exp(-\mathrm{W}(x)) = \mathrm{W}(x)$.

Q 24. D'après les théorèmes généraux ϕ_x est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc de classe $\mathscr{C}^2$, et pour tout $t \geqslant 0$, $\phi_x'(t) = x^2\mathrm{e}^{-t}\exp(-x\mathrm{e}^{-t}) = xg(x\mathrm{e}^{-t})$ où g est la fonction $u \mapsto u\mathrm{e}^{-u}$. Une étude élémentaire de la fonction g sur $\mathbb{R}_+$ fournit les variations suivantes :

u	0	1	$+\infty$
$g(u)$	0 $\nearrow$	$1/\mathrm{e}$	$\searrow$ 0

Donc pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant g(x\mathrm{e}^{-t}) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$ et par suite $0 \leqslant \phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}$.

Q 25. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big|w_{n+1}(x) - \mathrm{W}(x)\big| = \big|\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(\mathrm{W}(x))\big|$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $\big|w_{n+1}(x) - \mathrm{W}(x)\big| \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}\big|w_n(x) - \mathrm{W}(x)\big|$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\big|w_n(x) - \mathrm{W}(x)\big| \leqslant \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n \big|w_0(x) - \mathrm{W}(x)\big| = \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n \big|1 - \mathrm{W}(x)\big|$$

Q 26. La fonction W est continue sur $[0, \mathrm{e}]$ donc bornée ; on pose $\mathrm{M} = \|\mathrm{W}\|_{\infty,[0,\mathrm{e}]}$.
Sur l'intervalle $[0, a]$ avec $a < \mathrm{e}$ on a donc $\|w_n - \mathrm{W}\|_{\infty,[0,a]} \leqslant \mathrm{M}\left(\frac{a}{\mathrm{e}}\right)^n$ et ainsi $\lim \|w_n - \mathrm{W}\|_{\infty,[0,a]} = 0$: la convergence de (w_n) vers W est uniforme sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a < \mathrm{e}$.

Q 27. La fonction W est continue en e et $\mathrm{W}(\mathrm{e}) = 1$ donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $a < \mathrm{e}$ tel que tout $x \in [a, \mathrm{e}]$, $\big|\mathrm{W}(x) - 1\big| \leqslant \epsilon$.
D'après la question 25, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a, \mathrm{e}]$, $\big|w_n(x) - \mathrm{W}(x)\big| \leqslant \epsilon$.
D'après la question 26, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, pour tout $x \in [0, a]$, $\big|w_n(x) - \mathrm{W}(x)\big| \leqslant \epsilon$.
En combinant ces deux résultats on obtient que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, pour tout $x \in [0, \mathrm{e}]$, $\big|w_n(x) - \mathrm{W}(x)\big| \leqslant \epsilon$, soit encore : pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $\|w_n - \mathrm{W}\|_{\infty,[0,e]} \leqslant \epsilon$. La convergence de (w_n) vers W est bien uniforme sur $[0, \mathrm{e}]$.