Corrigé : fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle (Centrale PC 2020)

I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

I. A – Premières propriétés

Q 1. D'après le théorème de transfert, $\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_k)\,e^{itx_k} = \sum_{k=1}^{r} a_k\,e^{itx_k}$.

Q 2. Notons $f_n : t \mapsto a_n\,e^{itx_n}$. On a $\|f_n\|_\infty = |a_n| = \mathbb{P}(X = x_n)$ et $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ converge (sa somme vaut 1) donc la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement, donc absolument. D'après le théorème de transfert, ϕ_X est définie sur $\mathbb{R}$, et $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,e^{ix_nt}$.

Q 3. Les fonctions f_n sont continues et la convergence de $\sum f_n$ est normale, donc uniforme, donc ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Par linéarité de l'espérance, $\phi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}\,\mathbb{E}(e^{itaX}) = e^{itb}\,\phi_X(at)$.

Q 5. On a $\phi_X(-t) = \mathbb{E}(e^{-itX}) = \overline{\mathbb{E}(e^{itX})} = \overline{\phi_X(t)}$. La fonction ϕ_X est donc paire si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$, soit $\phi_X(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

I. B – Trois exemples

Q 6. D'après Q1, $\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\,e^{ikt} = (p\,e^{it} + q)^n$.

Q 7. D'après Q2, $\phi_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}\,e^{int} = \dfrac{p\,e^{it}}{1 - q\,e^{it}}$, toujours avec $q = 1 - p$.

Q 8. D'après Q2, $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda t}\,e^{int} = e^{-\lambda t}\exp(\lambda\,e^{it})$.

I. C – Image de ϕ_X

Q 9. On suppose $X(\Omega)$ dénombrable, et on utilise les notations de Q2.

La convergence étant absolue, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|\phi_X(t)\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,e^{itx_n}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini, la preuve est identique avec une somme finie.

Q 10. Posons $Y = \dfrac{t_0}{2\pi}(X - a)$. Par hypothèse Y est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et d'après Q4, $\phi_X(t) = e^{iat}\,\phi_Y\Big(2\pi\dfrac{t_0}{t}\Big)$. En particulier, $\phi_X(t_0) = e^{iat_0}\,\phi_Y(2\pi)$. Mais $\phi_Y(2\pi) = \mathbb{E}(e^{2i\pi Y}) = \mathbb{E}(1) = 1$ car $Y(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ donc $\phi_X(t_0) = e^{iat_0}$ et ainsi $\left|\phi_X(t_0)\right| = 1$.

Q 11. Puisque $t_0 \neq 0$ il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_X(t_0) = e^{iat_0}$, soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,e^{it_0x_n} = e^{iat_0}$, ou encore $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,e^{it_0(x_n-a)} = 1$.

Q 12. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big(1 - e^{it_0(x_n-a)}\Big) = 0$, et en prenant la partie réelle : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big(1 - \cos(t_0(x_n - a))\Big) = 0$.

Q 13. Une somme de termes positifs n'est nulle que si chacun des termes est nul, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n\Big(1 - \cos(t_0(x_n - a))\Big) = 0$.
Lorsque $a_n \neq 0$ on a $\cos(t_0(x_n - a)) = 1$ soit $t_0(x_n - a) \equiv 0 \mod [2\pi]$; autrement dit $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.

Q 14. Par contraposée, $x_n \notin a + \dfrac{2\pi}{t_0}$ implique $a_n = 0$, soit $\mathbb{P}(X = x_n) = 0$.

Les événements $[X = x_n]$ sont incompatibles donc $\mathbb{P}\Big(X \notin a + \dfrac{2\pi}{t_0}\Big) = \sum_{x_n \notin a + \frac{2\pi}{t_0}} \mathbb{P}(X = x_n) = 0$, d'où $\mathbb{P}\Big(X \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\Big) = 1$.

II Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

II. A – Première méthode

II. A. 1)

Q 15. $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{a_k}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{i(x_k - m)t}\,\mathrm{d}t$.

Si $x_k \neq m$, $\displaystyle\frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{i(x_k-m)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{T}}\left[\frac{1}{i(x_k-m)}\,\mathrm{e}^{i(x_k-m)t}\right]_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} = \frac{\sin(x_k-m)\mathrm{T}}{(x_k-m)\mathrm{T}} = \operatorname{sinc}\big((x_k-m)\mathrm{T}\big)$. Cette formule reste vraie lorsque $x_k = m$ car $\operatorname{sinc}(0) = 1$ donc $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)\operatorname{sinc}\big((x_k - m)\mathrm{T}\big)$.

Q 16. On a $\displaystyle\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \operatorname{sinc}\big((x_k - m)\mathrm{T}\big) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc :

- s'il existe $k \in [\![1, r]\!]$ tel que $x_k = m$ alors $\displaystyle\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = m)$;
- dans le cas contraire, $\displaystyle\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = 0 = \mathbb{P}(\mathrm{X} = m)$.

Dans tous les cas on a bien $\displaystyle\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = m)$.

II. A. 2)

Q 17. $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \displaystyle\frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $f_n(t) = a_n\,\mathrm{e}^{i(x_k-m)t}$. On a $\|f_n\|_\infty = a_n$ et $\sum a_n$ converge (sa somme vaut 1) donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, et donc uniformément. L'intervalle d'intégration $[-\mathrm{T}, \mathrm{T}]$ étant un segment on peut intervertir : $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \displaystyle\frac{1}{2\mathrm{T}} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \operatorname{sinc}\big((x_n - m)\mathrm{T}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)$ par un calcul analogue à la question précédente.

Q 18. Si $m = x_n$, $g_n(h) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$ donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} g_n(h) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$. Si $m \neq x_n$ alors $\displaystyle\lim_{h\to 0} g_n(h) = 0$ donc on peut prolonger g_n par continuité sur $\mathbb{R}_+$ en posant $\tilde{g}_n(0) = \begin{cases} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n) & \text{si } x_n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q 19. Sur $\mathbb{R}_+$ on a $\|\tilde{g}_n\|_\infty = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$ donc la convergence de $\sum \tilde{g}_n$ est normale, et donc uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Chacune de ces fonctions étant continue, on en déduit que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Q 20. $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \mathrm{G}\left(\dfrac{1}{\mathrm{T}}\right)$ et G est continue en 0 donc $\displaystyle\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \mathrm{G}(0)$.

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = m$ alors $\tilde{g}_k(0) = \begin{cases} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = m) & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\mathrm{G}(0) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = m)$.

Si un tel entier n n'existe pas alors $\mathrm{G}(0) = 0 = \mathbb{P}(\mathrm{X} = m)$ donc dans tous les cas $\displaystyle\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = m)$.

II. A. 3) Application

Q 21. D'après les questions 16 et 20 on a $\displaystyle\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = m)$ mais aussi, puisque $\phi_\mathrm{Y} = \phi_\mathrm{X}$, $\displaystyle\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} = m)$. On en déduit que X et Y ont la même loi.

II. B – Deuxième méthode

Q 22. Pour tout $t \neq 0$, $\mathrm{K}_{a,b}(t) = \displaystyle\frac{1}{2it} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(itb)^n - (ita)^n}{n!} = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(ib)^n - (ia)^n}{n!} t^{n-1}$, formule qui reste vraie pour $t = 0$.
$\mathrm{K}_{a,b}$ est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$; il en résulte que $\mathrm{K}_{a,b}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q 23. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale :

– pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto K_{a,x}(t)$ est continue par morceaux sur $[-N, N]$ (donc intégrable) ;

– pour tout $t \in [-N, N]$ la fonction $x \mapsto K_{a,x}(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\dfrac{\partial K_{a,x}}{\partial x}(t) = \dfrac{1}{2}e^{itx}$;

– pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}e^{itx}$ est continue par morceaux sur $[-N, N]$ et $\left|\dfrac{1}{2}e^{itx}\right| \leqslant \dfrac{1}{2} = \phi(t)$.

La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $[-N, N]$ donc le théorème s'applique : F_N est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F'_N(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-N}^{N} e^{itx}\,dt$.

Si $x \neq 0$, $F'_N(x) = \dfrac{\sin(Nx)}{x} = N\,\mathrm{sinc}(Nx)$; si $x = 0$, $F'_N(0) = N = N\,\mathrm{sinc}(0)$ donc dans tous les cas $F'_N(x) = N\,\mathrm{sinc}(Nx)$.

Q 24. On en déduit que $\displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,dt = F_N(b) = F_N(a) + \int_a^b F'_N(x)\,dx$. Mais $F_N(a) = 0$ et le changement de variable $s = Nx$ conduit à : $\displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,dt = \int_a^b N\,\mathrm{sinc}(Nx)\,dx = \int_{Na}^{Nb} \mathrm{sinc}(s)\,ds$.

Q 25. $\displaystyle\int_0^X \mathrm{sinc}(s)\,ds = \int_0^1 \mathrm{sinc}(s)\,ds + \int_1^X \frac{\sin s}{s}\,ds = \int_0^1 \mathrm{sinc}(s)\,ds + \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos s}{s^2}\,ds$.

$\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$ et la fonction $s \mapsto \dfrac{\cos s}{s^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ donc $\displaystyle\int_0^X \mathrm{sinc}(s)\,ds$ possède une limite lorsque X tend vers $+\infty$, ce qui prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(s)\,ds$ converge.

Q 26. On écrit $\displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,dt = \int_0^{Nb} \mathrm{sinc}(s)\,ds - \int_0^{Na} \mathrm{sinc}(s)\,ds$.

Si $x > 0$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{Nx} \mathrm{sinc}(s)\,ds = \frac{\pi}{2}$.

Si $x = 0$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{Nx} \mathrm{sinc}(s)\,ds = 0$.

Si $x < 0$, la fonction sinc étant paire on a $\displaystyle\int_0^{Nx} \mathrm{sinc}(s)\,ds = -\int_0^{-Nx} \mathrm{sinc}(s)\,ds$ donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{Nx} \mathrm{sinc}(s)\,ds = -\frac{\pi}{2}$.

On en déduit :

– Si $0 < a < b$ alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$;

– Si $a = 0 < b$ alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$;

– Si $a < b < 0$ alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,dt = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$;

– Si $a < 0 = b$ alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$.

– Si $a < 0 < b$ alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$;

Q 27. Avec les notations de Q1, $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \phi_X(-t)K_{a,b}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{r} \frac{a_k}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)e^{-ix_k t}\,dt = \sum_{k=1}^{r} \frac{a_k}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)\,dt$.

D'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x_k < a \\ 0 & \text{si } b < x_k \\ \pi & \text{si } a < x_k < b \end{cases}$ donc

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \phi_X(-t)K_{a,b}(t)\,dt = \sum_{a<x_k<b} a_k = \sum_{a<x_k<b} \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(a < X < b)$$

III Régularité de ϕ_X

III. A –

Q 28. Si $|x| \leqslant 1$ alors $|x|^j \leqslant 1 \leqslant 1 + |x|^k$; si $|x| \geqslant 1$ alors $|x|^j \leqslant |x|^k \leqslant 1 + |x|^k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc $a_n|x_n|^j \leqslant a_n + a_n|x_n|^k$. La série $\sum a_n$ converge (sa somme vaut 1), ainsi que $\sum a_n|x|^k$ puisque X possède un moment d'ordre k, donc la série $\sum a_n|x_n|^j$ converge, ce qui prouve que X possède un moment d'ordre j.

Q 29. Posons $f_n(t) = a_n\,\mathrm{e}^{ix_nt}$. la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^k$, et pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $f_n^{(j)}(t) = (ix_n)^j a_n\,\mathrm{e}^{ix_nt}$.
Puisque X possède un moment d'ordre j les séries de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ convergent absolument. De plus, $\|f_n^{(k)}\|_\infty = a_n|x_n|^k$ et puisque X possède un moment d'ordre k, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation des séries de fonctions permet de conclure : ϕ_X est de classe $\mathscr{C}^k$, et $\phi_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(ix_n)^k\,\mathrm{e}^{ix_nt}$.

Q 30. En particulier $\phi_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(ix_n)^k = i^k\mathbb{E}(X^k)$ donc $\mathbb{E}(X^k) = (-i)^k\phi_X^{(k)}(0)$.

III. B –

Q 31. D'après la formule de Taylor-Young, $\phi_X(2h) \underset{0}{=} \phi_X(0) + 2h\phi_X'(0) + 2h^2\phi_X''(0) + o(h^2)$ et $\phi_X(-2h) \underset{0}{=} \phi_X(0) - 2h\phi_X'(0) + 2h^2\phi_X''(0) + o(h^2)$ donc $\lim_{h\to 0} f(h) = -\phi_X''(0)$.

Q 32. Pour $h \neq 0$, $f(h) = \dfrac{1}{4h^2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(2 - \mathrm{e}^{2ihx_n} - \mathrm{e}^{-2ihx_n}\right)$. Or $\sin(hx_n)^2 = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{ihx_n} - \mathrm{e}^{-ihx_n}}{2i}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2ihx_n} + \mathrm{e}^{-2ihx_n} - 2\right)$ donc $f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$.

Q 33. Soit $N \in \mathbb{N}$. S'agissant d'une somme de termes positifs, on a $\sum_{n=0}^{N} a_n \dfrac{\sin^2(hx_n)}{h^2} \leqslant f(h)$. Faisons maintenant tendre h vers 0 dans cette inégalité : on obtient $\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2 \leqslant -\phi_X''(0)$. Nous avons ainsi montré que les sommes partielles de la série $\sum a_n x_n^2$ sont majorées. S'agissant d'une série à termes positifs, cela prouve sa convergence, donc X admet un moment d'ordre 2.

III. C –

Q 34. $\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^{2k}$ est la somme d'une série à termes positifs donc si $\alpha = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n^{2k}\mathbb{P}(X = x_n) = 0$. Lorsque $x_n \neq 0$ on a $\mathbb{P}(X = x_n) = 0$, ce qui implique que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. La variable aléatoire X est presque sûrement nulle.

Q 35. $\phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = x_n)\mathrm{e}^{ix_nt} = \dfrac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^{2k}\,\mathrm{e}^{ix_nt} = \dfrac{(-1)^k}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(ix_n)^{2k}\,\mathrm{e}^{ix_nt} = \dfrac{(-1)^k}{\alpha}\phi_X^{(2k)}(t)$. Puisque ϕ_X est supposée de classe $\mathscr{C}^{2k+2}$ on en déduit que ϕ_Y est de classe $\mathscr{C}^2$.

Q 36. D'après Q33 la variable aléatoire Y possède un moment d'ordre 2, ce qui signifie que la série $\sum x_n^2\mathbb{P}(Y = x_n) = \dfrac{1}{\alpha}\sum a_n x_n^{2k+2}$ converge, autrement dit X possède un moment d'ordre $2k+2$.

Q 37. Montrons par récurrence que $k \in \mathbb{N}^*$ que si ϕ_X est de classe $\mathscr{C}^{2k}$ alors X possède un moment d'ordre $2k$:

- le cas $k = 1$ a été traité dans la partie III.B ;
- si $k \geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang k, et supposons ϕ_X de classe $\mathscr{C}^{2k+2}$. ϕ_X est a fortiori de classe $\mathscr{C}^{2k}$ donc par hypothèse de récurrence X possède un moment d'ordre $2k$. Si $\alpha = \mathbb{E}(X^{2k}) \neq 0$ on peut appliquer Q36 et en déduire que X possède un moment d'ordre $2k+2$. Si $\alpha = 0$ on a vu que X est presque sûrement nulle donc possède un moment à tout ordre. dans tous les cas, la récurrence se propage.

IV Développement en série entière de ϕ_X

IV. A –

Q 38. $\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{r} a_k\,\mathrm{e}^{ix_kt} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{n=0}^{+\infty} a_k \dfrac{(ix_kt)^n}{n!}$.
Il s'agit d'une somme finie de séries convergentes, donc $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(it)^n}{n!}\sum_{k=1}^{r} a_k x_k^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n)$.

IV. B –

Q 39. D'après l'égalité de Taylor avec reste intégral, $\mathrm{e}^{iy}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(iy)^k}{k!}=\int_0^y\frac{(y-t)^n}{n!}i^{n+1}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t$.

Lorsque $y\geqslant 0$, $\left|\mathrm{e}^{iy}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(iy)^k}{k!}\right|\leqslant\int_0^y\frac{(y-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t=\frac{y^{n+1}}{(n+1)!}$; lorsque $y\leqslant 0$, $\left|\mathrm{e}^{iy}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(iy)^k}{k!}\right|\leqslant\int_y^0\frac{(t-y)^n}{n!}\,\mathrm{d}t=\frac{(-y)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Q 40. Pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$, $\phi_{\mathrm{X}}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,\mathrm{e}^{ix_nt}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\Big(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{(ix_nt)^k}{k!}\Big)+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\Big(\mathrm{e}^{ix_nt}-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{(ix_nt)^k}{k!}\Big)$.

On a comme précédemment $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\Big(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{(ix_nt)^k}{k!}\Big)=\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{(it)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_n^k=\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}(\mathrm{X}^k)$.

D'après la question précédente, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\Big(\mathrm{e}^{ix_nt}-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{(ix_nt)^k}{k!}\Big)\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{|x_nt|^{\mathrm{N}+1}}{(\mathrm{N}+1)!}=\frac{|t|^{\mathrm{N}+1}}{(\mathrm{N}+1)!}\mathbb{E}\Big(|\mathrm{X}|^{\mathrm{N}+1}\Big)$.

Par hypothèse, lorsque N tend vers $+\infty$, $\frac{|t|^{\mathrm{N}+1}}{(\mathrm{N}+1)!}\mathbb{E}\Big(|\mathrm{X}|^{\mathrm{N}+1}\Big)=\mathrm{O}(u_{\mathrm{N}})$ avec $u_{\mathrm{N}}=\frac{|t|^{\mathrm{N}+1}(\mathrm{N}+1)^{\mathrm{N}+1}}{(\mathrm{N}+1)!\mathrm{R}^{\mathrm{N}+1}}$ et d'après la formule de Stirling, $u_{\mathrm{N}}\sim\Big(\frac{\mathrm{e}\,|t|}{\mathrm{R}}\Big)^{\mathrm{N}+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{N}}}$. On en déduit que lorsque $|t|\leqslant\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{e}}$ alors $\lim u_{\mathrm{N}}=0$.

Ceci montre que $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\Big(\mathrm{e}^{ix_nt}-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{(ix_nt)^k}{k!}\Big)=0$ donc que la série $\sum\frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}(\mathrm{X}^k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}(\mathrm{X}^k)=\phi_{\mathrm{X}}(t)$.